



HAL
open science

Les instruments mathématiques au service des apprentissages.

Anthony Pattarozzi

► **To cite this version:**

Anthony Pattarozzi. Les instruments mathématiques au service des apprentissages.. Education. 2021. hal-03342288

HAL Id: hal-03342288

<https://univ-fcomte.hal.science/hal-03342288>

Submitted on 13 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire

Présenté pour l'obtention du Grade de

MASTER

« **Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation** »

Mention 1^{er} degré, Professeur des Écoles

Les instruments mathématiques au service des apprentissages.

Présenté par

PATTAROZZI Anthony

Sous la direction de :

THIEBAUD Caroline

Professeuse agrégée en mathématiques.

TITRE : Les instruments mathématiques au service des apprentissages.

RESUME : Ce mémoire de recherche met en avant l'utilisation des instruments mathématiques pour transmettre des apprentissages. Il part de l'étude de certains instruments mathématiques et de leur histoire pour ensuite analyser les différentes mises en pratiques déjà effectuées. Ces recherches ont pour objectif de construire une mise en place possible dans une classe de cycle 2 pour transmettre aux élèves des stratégies et des procédures de calcul.

Mots clés : Mathématiques, instruments, bouliers, calcul, école.

TITLE: Mathematical instruments for learning.

ABSTRACT : This research paper highlights the use of mathematical instruments to transmit learning. He starts from the study of some mathematical instruments and their history to then analyze the different practices already carried out. The aim of this research is to construct a possible set-up in a Cycle 2 class in order to transmit to the students strategies and calculation procedures.

Keywords: Mathematics, instruments, bouliers, calculus, school.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont aidé lors de la réalisation de ce mémoire et leur adresse mes remerciements.

Je voudrais dans un premier temps remercier ma directrice de mémoire Madame THIEBAUD Caroline, professeur de mathématiques à l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education de Besançon, pour m'avoir guidé tout au long de la réalisation de ce mémoire de recherche.

Je remercie également toute l'équipe éducative de l'école Pezole de Valentigney pour leurs précieux conseils et en particulier mon complément Madame LOBATO Carole qui m'a beaucoup appris en me partageant ses connaissances et ses expériences.

Enfin, je souhaite remercier les personnes qui m'ont aidé à la relecture ainsi qu'à la correction de ce mémoire.

DECLARATION DE NON-PLAGIAT

Je soussigné Anthony PATTAROZZI déclare que ce mémoire est le fruit d'un travail de recherche personnel et que personne d'autre que moi ne peut s'en approprier tout ou partie.

J'ai conscience que les propos empruntés à d'autres auteurs ou autrices doivent être obligatoirement cités, figurer entre guillemets, et être référencés dans une note de bas de page.

J'étaye mon travail de recherche par des écrits systématiquement référencés selon une bibliographie précise, présente dans ce mémoire.

J'ai connaissance du fait que prétendre être l'auteur - l'autrice de l'écrit de quelqu'un d'autre enfreint les règles liées à la propriété intellectuelle.

A Belfort, le 14 mai 2021

PATTAROZZI Anthony

A handwritten signature in blue ink, consisting of several overlapping, stylized strokes that form a complex, abstract shape. The signature is written on a light-colored, slightly textured paper.

Sommaire

I Contexte	7
1 Introduction :	7
2 Définitions :	8
2.1 Mathématiques.	8
2.2 Boulier	8
2.3 L'école.....	8
2.4 L'éducation.	9
2.5 La culture	9
2.6 L'apprentissage.....	9
2.7 La motivation.....	9
3 Problématique :	10
4 L'histoire du nombre.	10
5 L'histoire du boulier.	11
5.1 Tablettes.....	11
5.2 Le boulier chinois.....	12
5.3 Le boulier japonais.	12
5.4 Le boulier russe.	12
5.5 Le boulier d'école.	13
II Analyses.....	13
1 La manipulation en mathématiques.	13
2 Perspectives didactiques sur le boulier.	15
3 Des scénarios portant sur l'utilisation d'artéfacts.....	15
4 L'utilisation de l'abaque à jeton et du boulier chinois dans une classe de CE1.	19
5 L'apport du boulier chinois en calcul mental.	20
6 Un instrument pour la lecture et l'écriture des nombres	22
7 Les cubes et barres de cinq cubes	23
8 L'abaque en couleur	23
8.1 Numération de position en cycle 2	23
8.2 Opérations arithmétiques	25
9 Le fonctionnement du boulier chinois.	27
9.1 Quelques informations.....	27
9.2 Quelques règles :	28
9.3 L'utilisation de ce boulier à l'école.	29
9.3.1 En cycle 1.....	29

9.3.2	En cycle 2.....	29
9.3.3	En cycle 3.....	31
10	Quel boulier utiliser en classe ?.....	31
10.1	Le boulier chinois.....	32
10.2	Le boulier japonais.	32
10.3	Le boulier à tige.	32
10.4	Le boulier russe « ikea ».....	32
III	Expérimentations.....	34
1	Présentation de ma classe.....	34
2	Présentation du projet.	34
2.1.1	Activité pour présenter le boulier.	35
2.1.2	Observations des élèves :.....	35
2.2	Activité pour comprendre l'utilisation du boulier.....	36
2.3	Activité pour découvrir les compléments à 10.....	36
2.4.1	Activité pour travailler et mobiliser les compléments à 10.	37
2.4.2	Observations des élèves :.....	38
2.5.1	Activité sur les unités et les dizaines.....	38
2.5.2	Observation des élèves :	39
2.6.1	Activité sur la décomposition additive des nombres inférieurs à 100.....	39
2.6.2	Observation des élèves :	40
2.7.1	Activité sur la recombinaison additive des nombres inférieurs à 100.....	40
2.7.2	Observation des élèves :	41
2.8.1	Activité pour élaborer des stratégies de calcul.	41
2.8.2	Observation des élèves :	42
2.9.1	Activité sur la commutativité de l'addition.....	43
2.9.2	Observation des élèves :	43
2.10.1	Activité sur les additions	44
2.10.2	Observation des élèves :	44
2.11	D'autres activités pour aller plus loin.....	45
IV	Conclusion.	46
V	Bibliographie.....	48
VI	Annexes.....	49

I Contexte

1 Introduction :

J'ai choisi de travailler sur les mathématiques tout d'abord car c'est une discipline où je me sens à l'aise et plutôt compétent. C'est également une discipline qui m'intéresse, qui m'intrigue depuis mon plus jeune âge et que j'aime pratiquer. Pour moi, ce qui rend cette discipline plus intéressante, plus rassurante est le fait que l'on puisse vérifier notre réponse à un calcul ou à un problème. De plus, cette discipline ne requiert pas autant de connaissances que d'autres disciplines comme l'histoire géographie ou les sciences. Mais cette discipline qui me paraît plus simple que d'autres, est sources de nombreuses difficultés chez les élèves. En effet, les difficultés des élèves sont beaucoup plus importantes et récurrentes en mathématiques. Elles peuvent d'être de l'ordre de la compréhension comme de l'ordre de la motivation. Cette discipline est considérée par beaucoup d'élèves comme leur « bête noire ». C'est donc pour toutes ces raisons que mon choix s'est porté sur les mathématiques. Mon intérêt pour les instruments mathématiques, et particulièrement pour les bouliers, est né lorsque j'ai découvert un reportage France 3 sur l'utilisation des bouliers à l'école primaire. Ce reportage m'a totalement subjugué en voyant les élèves effectuer des calculs d'une incroyable rapidité. Dès lors, je me suis intéressé et questionné sur le sujet. J'ai donc choisi ce thème de mémoire pour comprendre comment il est possible d'utiliser les instruments mathématiques avec tous les élèves afin de les faire progresser, de les faire apprendre plus rapidement et plus efficacement, et de surmonter leurs éventuelles difficultés.

Lors de cette année scolaire, j'effectue mon stage à l'école Pezole de Valentigney dans une classe de CE1 – CE2. Ma classe est composée de 27 élèves et leur niveau est très hétérogène. En effet, 12 élèves de ma classe ont des PPRE et ont des difficultés en français et en mathématiques. Lors du début d'année, j'ai pu me rendre compte de leurs difficultés dans les calculs et dans la numération. Cependant, étant en complément avec ma collègue, nous avons partagé les disciplines d'enseignement et c'est elle qui s'occupe de la numération et du calcul. Ma seule intervention dans ces notions intervient lors de la résolution de problème ou lors du calcul mental.

En tenant compte des caractéristiques de mes élèves et de ces contraintes, je me suis questionné sur la mise en place que je pourrais effectuer pour faire progresser mes élèves.

En quoi l'utilisation des instruments en mathématiques va-t-elle aider les élèves dans les apprentissages en cycle 2 ?

2 Définitions :

2.1 Mathématiques.

Le mot « mathématique » vient du grec par l'intermédiaire du latin. Le mot *máthēma* est dérivé du verbe *manthánō* qui signifie apprendre. Il signifie « science, connaissance » puis « mathématiques ».

Il a donné naissance à l'adjectif *mathematikos*, d'abord « relatif au savoir » puis « qui concerne les sciences mathématiques ». Cet adjectif a été adopté en latin (*mathematicus*) et dans les langues romanes par la suite (« mathématique » en français, *matematica* en italien, etc.).

Les mathématiques sont des connaissances abstraites résultant de raisonnement logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les ensembles, les structures, les transformations, les relations et les opérations.

2.2 Boulier

Le boulier est un abaque (outil servant à calculer). Celui-ci est lié au système de numération décimale mais il existe deux types de bouliers :

Les bouliers en base 10 (Europe), où chaque boule représente, selon la tige sur laquelle elle se trouve, une unité, une dizaine, une centaine, ...

Les bouliers en base alternée (5, 2) (en Asie) pour lesquels chaque tige comprend deux parties : une partie supérieure où les boules valent 5 unités (ou dizaines, centaines, ...) et une partie inférieure où les boules valent une unité (ou dizaine, centaine, ...).

Les bouliers permettent d'effectuer toutes les opérations (addition, soustraction, multiplication, division).

2.3 L'école.

L'école est un établissement dans lequel un enseignement est fourni gratuitement, du moins en ce qui concerne l'enseignement élémentaire et fondamental, aux élèves. Le rôle de l'école est de donner l'accès à la culture aux élèves par l'éducation et la formation. C'est un lieu d'apprentissage, de sociabilité et d'échange pour tous les élèves excluant toute forme de discrimination. L'école fondamentale vise à atteindre des objectifs pour les élèves. Elle doit promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves et elle doit amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences. Elle

doit préparer tous les élèves à être des citoyens responsables. Enfin, elle doit assurer à tous les élèves des chances égales d'émancipation sociale.

2.4 L'éducation.

L'éducation est l'ensemble des processus et procédés qui permettent à tout enfant humain d'accéder progressivement à la culture ; l'accès à la culture est ce qui distingue l'homme de l'animal. Reboul « La philosophie de l'éducation » 1989.

2.5 La culture.

La culture est l'ensemble des normes, des valeurs et des pratiques communément partagées par les membres d'une société, ainsi que les institutions qui véhiculent ces valeurs. Hebrard « réflexion et perspectives » 1986.

2.6 L'apprentissage.

L'apprentissage est un ensemble de mécanisme menant à l'acquisition de savoirs, savoir-faire ou de connaissances. C'est un changement durable de comportement dû à l'interaction entre l'individu et l'environnement.

2.7 La motivation.

La motivation désigne tout ce qui amène à entreprendre des actions et à y persister jusqu'à réaliser ses objectifs. Elle suppose la volonté de faire un effort et d'atteindre des buts.

Comme l'ont défini Curry et Sarrazin en 2000, « l'effort est l'indicateur comportemental de la motivation ». Pour que l'élève produise un effort suffisant pour apprendre, il faut qu'il soit motivé par l'activité.

Il existe deux types de motivations : La motivation intrinsèque (épanouissement personnel) et la motivation extrinsèque (attente d'une récompense, crainte d'une sanction).

Les mathématiques sont souvent craintes ou redoutées dès l'école primaire. Beaucoup d'élèves présentent des difficultés dans cette discipline et par conséquent, se désintéresse de celle-ci. Lorsque l'enseignant annonce à ses élèves qu'ils vont effectuer des mathématiques, il est récurant d'observer de la démotivation chez les élèves et de les entendre soupirer ou se plaindre.

Les raisons de la démotivation chez les élèves en mathématiques :

- Elèves en difficulté pensent ne rien comprendre aux mathématiques.

- Les élèves doivent souvent répondre rapidement et n'ont pas le plaisir de réfléchir.
- Les élèves ne manipulent pas suffisamment (se perd au cycle 2 et 3).
- Le manque d'autonomie (un enfant mémorise mieux une règle qu'il a découvert).

Ce manque de motivation et ces difficultés présentes en mathématiques tendent à se poser des questions. Ainsi il est important de connaître les raisons de ces difficultés et d'imaginer des remédiations possibles. Des nombreuses méthodes sont proposées par des enseignants, des scientifiques et des inspecteurs. C'est notamment le cas de la méthode heuristique en mathématiques qui propose une approche différente

3 Problématique :

En quoi l'utilisation des instruments en mathématiques va-t-elle aider les élèves dans les apprentissages en cycle 2 ?

4 L'histoire du nombre.

Les nombres et leur utilisation remonte de la nuit des temps. En effet, c'est au Paléolithique que remonte l'apparition des supports permettant de conserver les nombres.

Mais c'est la découverte d'un groupement récursif permettant de considérer chaque groupe d'objets comme un nouvel objet faisant partie d'un nouveau groupe qui va nous intéresser dans notre travail. On appelle ça la base.

On remarque qu'aux quatre coins du monde ancien, sans communication, ces groupements se sont construits le plus souvent sur la base de groupes de 10 objets. Cela nous incite à penser que les premiers langages numériques ont été gestuels et que nos mains, avec leur facilité à montrer plus ou moins de doigts levés (le plus grand étant 10) durent se plier à une autre gestuelle pour continuer (montrer successivement deux mains ouvertes pour désigner vingt, ...). Les groupes de dix sont comptés comme des objets et le système s'ouvre à la capacité de représenter tous les nombres naturels.

Certains peuples d'Amérique centrale ont utilisé le groupe vingt.

La gestuelle des nombres s'est prêtée à une représentation des cinquante premiers (environ). Pour représenter des nombres plus grands, les hommes ont inventé des écritures. Les Egyptiens marquaient d'un à neuf traits verticaux les nombres de 1 à 9. De même avec ce

symbole  répété jusqu'à neuf fois pour les dizaines, ce symbole  pour représenter les centaines et un lotus pour représenter un millier. Avec cette écriture lourde, ils ont réalisé de nombreux calculs savants.

Un grand pas a été franchi en Grèce. En effet, l'invention d'un symbole unique pour représenter un nombre (α pour 1, β pour 2, ...) a permis d'effectuer des écritures plus courtes mais a rendu la pratique des calculs encore plus complexe.

Mais c'est les savants chinois qui ont eu l'idée formidable de pratiquer leurs calculs sur un quadrillage dans lequel ils posaient des allumettes, appelées jonchets, toutes identiques, mais qui prenaient des valeurs différentes (1, 10 ou 100) selon la case sur laquelle elles étaient posées. Cet abaque à jonchets a été remplacé par le boulier, avec lequel nos techniques européennes ne peuvent rivaliser.

L'Inde, puis le monde arabe, ont transformé cet essai par l'écriture et inventé un système révolutionnaire : neuf symboles pour les nombres de un à neuf, et un point, qui grossira en zéro pour représenter tous les nombres, aussi grands qu'ils soient.

Ces techniques sont arrivées en Europe après que les conquérants Arabes envahissent l'Espagne. Ce fut une grande évolution. En effet, de nombreuses techniques écrites posées de différentes opérations furent créées. Mais cette écriture permit surtout au savant belge Simon Stevin d'inventer les nombres décimaux en 1580.

5 L'histoire du boulier.

Cet instrument mathématique était utilisé par des peuples vivants aux extrémités du globe. Ainsi nous pouvons penser qu'il a été inventé indépendamment dans ces différents endroits. Il est difficile de savoir quand et où il a été créé pour la première fois mais le boulier est sans doute l'instrument d'aide au calcul le plus ancien de l'histoire de l'humanité.

Il en existe différents types :

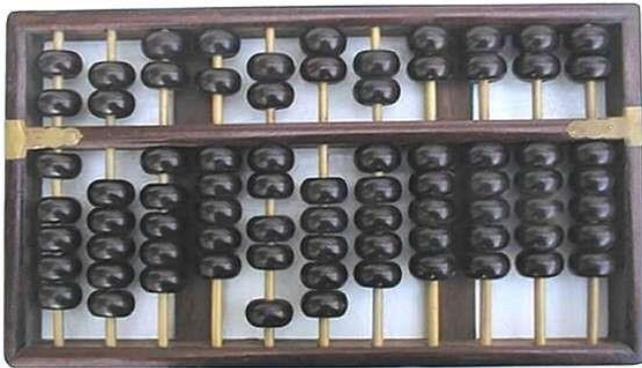
5.1 Tablettes.

Les grecs utilisaient des tablettes recouvertes de sable ou de poussière.



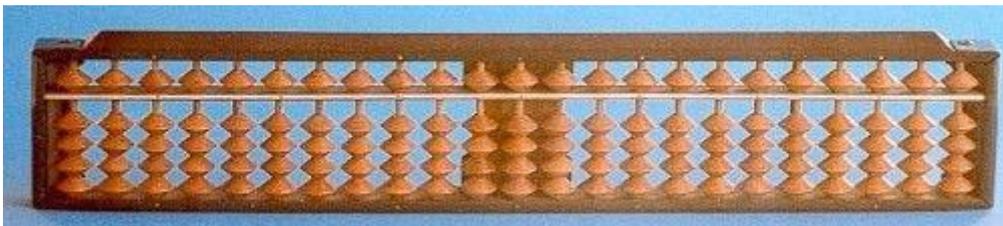
5.2 Le boulier chinois.

Le boulier chinois où sur chaque tige on trouve 5 boules qui représentent une unité (ou dizaine, centaine, ...) et deux boules qui représentent 5 unités (ou dizaines, centaines, ...).



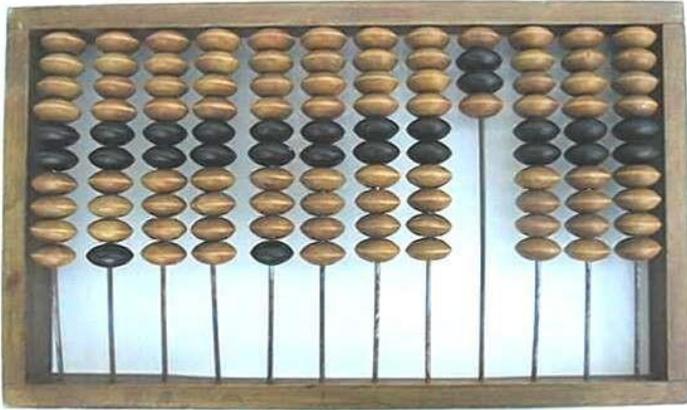
5.3 Le boulier japonais.

Le boulier japonais ou soroban. Il a perdu, par rapport au boulier chinois, une boule sur la partie supérieure et une boule sur la partie inférieure.



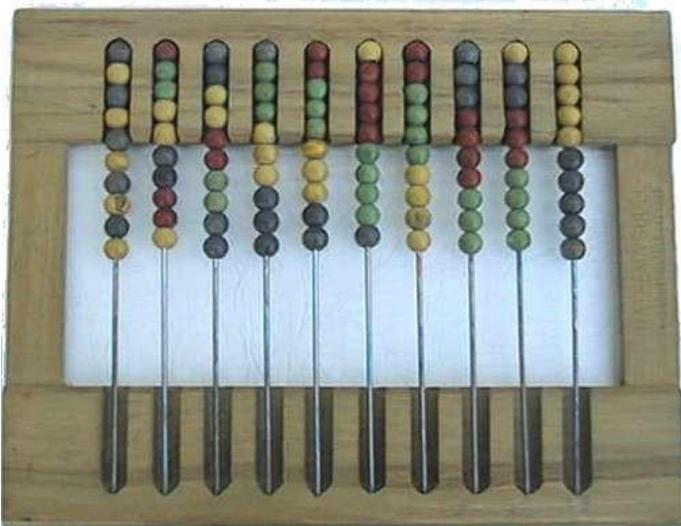
5.4 Le boulier russe.

Le boulier russe ou stchoty, utilisé également en Iran et en Turquie, est formé de tiges comportant chacune 10 boules de valeur 1.



5.5 Le boulier d'école.

Le boulier-compteur ou d'école, utilisé dans les écoles françaises jusqu'au XVIIIe siècle. Sur ce boulier, chaque tige et chaque boule à la même valeur. Ainsi il permet de représenter un nombre entier de 1 à 100.



II Analyses.

1 La manipulation en mathématiques.

L'article « Manipuler en mathématiques ... oui mais » de Joël Briand, propose une mise en scène d'actions afin de se rendre compte du rôle et de la place de la manipulation en mathématiques.

Même si le ministère met en avant la « méthode de Singapour » en prétextant que les élèves y mènent des activités mathématiques concrètes à partir de matériel attrayant et passent du

monde concret à une vision abstraite, de nombreuses recherches en didactique ont montré que la manipulation en mathématiques pouvait être un obstacle pour les élèves lorsqu'elle était mal organisée.

Pour aborder cette question de l'importance de l'organisation de la manipulation, Joël Briand propose d'analyser deux activités se déroulant en CP. Ces deux activités ont pour but de faire concevoir aux élèves que $4 + 3 = 7$.

Dans la première activité, l'enseignant montre 4 cubes aux élèves et les places dans une boîte. Ensuite, il montre 3 cubes et les places dans une seconde boîte. Il renverse la seconde boîte dans la première boîte et demande aux élèves combien de cube contient cette première boîte. Ici, les élèves ont juste à dénombrer une quantité.

Dans la seconde activité, l'enseignant effectue la même manipulation mais il ferme la boîte pour que les élèves ne puissent pas dénombrer la quantité présente dans la boîte. Ainsi il attend de ses élèves qu'ils effectuent une recherche, qu'ils écrivent dans leur cahier de brouillon des choses leur permettant de trouver la réponse attendue. La tâche des élèves consiste à produire des écrits qui permettent de trouver ce que contient la boîte.

Ainsi dans ces deux activités où le matériel utilisé est le même, l'apprentissage est différent. La manipulation est différente et cela change complètement la procédure des élèves.

Cet article montre bien que la manipulation en mathématiques n'est pas forcément bénéfique pour les élèves. Alors même si la manipulation favorise la motivation, l'engagement et le plaisir des élèves, il est selon moi important que l'enseignant utilise la manipulation avec un objectif et non pas uniquement pour faire manipuler les élèves.

Selon moi, la manipulation peut avoir des objectifs différents selon le moment où on l'utilise dans la séquence. Si la manipulation est utilisée en début de séquence, sur une nouvelle notion, il est important qu'elle soit utilisée afin d'apporter quelque chose en plus aux élèves et de les faire progresser. Lorsqu'elle est utilisée en fin de séquence, pour remobiliser des connaissances, cette manipulation peut être d'ordre ludique afin de stimuler la motivation et le plaisir des élèves.

Cette question sur l'importance de la mise en place de la manipulation doit servir pour la mise en place d'activités que nous effectuerons à l'aide des instruments de mathématiques.

2 Perspectives didactiques sur le boulier.

Dans l'article « Perspectives didactiques sur le boulier : un questionnement renouvelé » de Ghislaine Gueudet et Laetitia Bueno-Ravel, l'objectif est de présenter les recherches didactiques effectuées sur l'utilisation du boulier à l'école.

Ces recherches visent à étudier en quoi le boulier impacte ou peut impacter l'enseignement et les apprentissages en mathématiques.

Dans un premier temps, ces recherches montrent que pour la construction du nombre, le boulier chinois est beaucoup plus efficace que le boulier japonais. En effet, le boulier chinois met en évidence l'existence de plusieurs décompositions possible d'un même nombre grâce à la présence de 5 unaires et 2 quinaires dans chaque tige (unités, dizaines, ...).

La didactique des mathématiques a établi des résultats particulièrement utiles sur les recours des instruments mathématiques dans l'enseignement de cette discipline. Pour le boulier chinois, les caractéristiques soulignées précédemment vont avoir une influence sur les apprentissages. Mais cette influence variera en fonction de l'utilisation qu'en fait le professeur.

Il n'existe pas qu'un seul artéfact à disposition des élèves. En effet, les élèves peuvent disposer de bouliers matériels, de bande numériques, d'ardoises, de TBI, de tablettes tactiles, etc.

Le professeur doit donc choisir quels artéfacts utiliser, à quel moment les intégrer dans sa séquence et comment les articuler les uns aux autres. En articulant les bouliers matériels et les boulier virtuels, l'enseignant peut laisser davantage ses élèves en autonomie dans leurs apprentissages.

Mais pour mettre en place sa séquence, l'enseignant ne va pas utiliser le boulier seul, il va avoir recours à d'autres ressources (manuel, site internet, séquence d'un collègue, ou suivre une formation).

3 Des scénarios portant sur l'utilisation d'artéfacts.

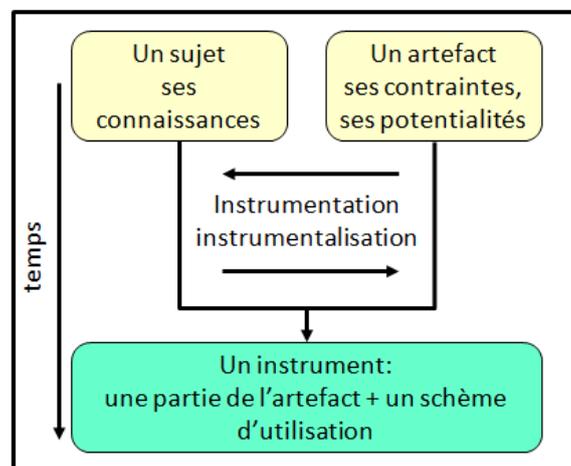
L'article « Des scénarios portant sur l'utilisation d'artéfacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire » de Michela MASCHIETTO et Maria G. BARTOLINI BUSSI présente deux exemples de scénarios pour l'apprentissage du nombre où l'intervention d'artéfacts est bénéfique.

Ces artefacts sont des objets créés par l'homme en fonction de leur utilité. Ils présupposent un projet d'utilisation et un but qu'ils visent à atteindre. Ici, le but est de favoriser l'apprentissage du nombre par les élèves.

Tout d'abord il est important de bien différencier l'artefact de l'instrument. En effet, l'artefact est un objet destiné à soutenir des activités nouvelles dans la réalisation d'une tâche. Quant à l'instrument, c'est ce que le sujet construit à partir de l'artefact.

Le développement d'un instrument est un processus dépendant de l'artefact et de l'activité du sujet. On appelle ça la genèse instrumentale qui est composée de l'instrumentalisation et de l'instrumentation.

Un instrument est donc composé d'un artefact et de l'utilisation du sujet permettant d'accomplir une tâche.



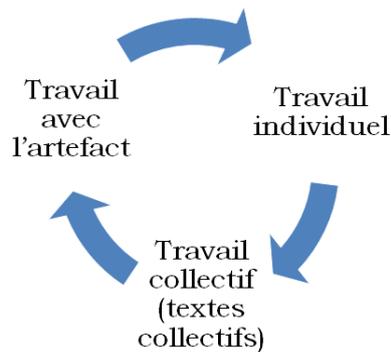
Lorsqu'un enseignant utilise un artefact pour transmettre des apprentissages aux élèves, il l'utilise comme un instrument de médiation sémiotique.

Cependant ce travail nécessite une analyse de l'artefact et une structuration du travail conduit avec cet artefact pour favoriser l'acquisition de compétences des élèves.

L'analyse d'un artefact repose sur son potentiel sémiotique qui « représente le double lien qui peut s'établir entre :

- L'artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée.
- L'artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissable comme mathématiques par un expert ». (Mariotti & Maracci 2010).

Le processus de médiation sémiotique est fondé sur l'implantation du cycle didactique. C'est-à-dire les activités à petit groupe avec l'artefact, les activités individuelles et les activités collectives correspondant à des discussions.



La première activité sur les nombres est proposée en école maternelle.

L'artéfact utilisé est un boulier géant. Afin d'attiser la curiosité et d'engager les élèves dans l'interprétation de cet artéfact, les enseignants ont choisi de monter ou non ce boulier.

Dans le premier cas, les enseignants ont entamé des discussions avec les élèves pour savoir leurs ressentis, leurs représentations de cet artéfact (« Qu'est-ce que c'est ? », « A quoi peut-il servir ? », etc.).

Dans le second cas, les enseignants ont varié leurs discussions afin d'explorer les composantes du boulier avec les élèves (« Que pouvons-nous construire ? », « Avez-vous des idées », « Comment cela peut-il servir ? », etc.). De plus, l'intervention d'un parent d'élève ou d'un grand-parent peut être utile pour assembler ce boulier géant.

Après avoir analysé l'artéfact et attisé la curiosité des élèves, l'enseignant démarre le processus d'instrumentalisation. Ainsi, chaque composante doit être identifiée avec des questions spécifiques lors de discussions de groupes (« Quelles sont les différentes parties de ce boulier ? », « Qu'est-ce qui bouge sur ce boulier ? », etc.).

Ensuite, s'en vient l'instrumentation du boulier géant. Ce boulier peut permettre d'accomplir différentes tâches tout au long de l'année. Par exemple, compter les points dans certains jeux, compter le nombre d'élèves présents, compter le nombre de chaises, de tables, etc.

Mais la résolution d'une tâche spécifique avec le boulier conduit à réfléchir sur « pourquoi » le boulier aide à résoudre ces problèmes. Ce sont donc les significations intrinsèquement incorporées dans le boulier qui sont mises en jeu :

- *Partition* : l'enfant compte les boules en les déplaçant sur la barre et garde en mémoire le comptage par la séparation des boules comptées et des boules à compter ;
- *Suite des premiers ordinaux* : l'enfant répète la suite des ordinaux pendant le comptage ;
- *Correspondance biunivoque* : le déplacement des boules est effectué en prononçant la suite des nombres, l'enfant déplace une seule boule pour chaque mot-nombre ;
- *Cardinalité* : le dernier ordinal prononcé représente la cardinalité de l'ensemble des boules comptées ;

- *Écriture des nombres en base dix* : la structure du boulier incorpore l'invention de l'écriture positionnelle en base dix (chaque rang est une dizaine).

Selon moi, ce boulier peut également être utilisé en école élémentaire afin d'aller plus loin avec les élèves. Il peut permettre d'aborder les compléments à 10 ou à 20, de faire comprendre la notion de valeur de position dans l'écriture des nombres et bien d'autres choses.

La seconde activité est proposée en école élémentaire et l'artéfact utilisé est la machine Zero+1. Cette machine est constituée d'une base verte avec cinq roues dentelées (3 roues jaunes sur la partie inférieure et 2 roues orange sur la partie supérieure). Chaque roue jaune possède 10 dents (alluchons) et chaque alluchon comporte les chiffres de 0 à 9. Chaque roue orange possède 10 dents mais une seule flèche mauve permet de faire tourner les roues jaunes.

Il y a la possibilité de placer une virgule intermédiaire entre les roues jaunes.

Ainsi en partant de la configuration initiale (000), on peut tourner la première roue jaune (à droite) dans le sens de l'aiguille d'une montre jusqu'à 009 sans que d'autres roues ne tournent. C'est lorsque l'on passe de l'alluchon 9 à 0 que la roue orange du dessus pousse la deuxième roue jaune qui va passer de l'alluchon 0 à 1. Nous aurons donc la configuration 010. Il se passe la même chose lorsque l'on passe de 099 à 100. A chaque fois qu'une roue orange enclenche la roue jaune suivante, un bruit retentit.



Zero+1 est une machine arithmétique qui permet d'effectuer les quatre opérations arithmétiques fondamentales. Elle permet la représentation symbolique des nombres en écriture décimale positionnelle à trois chiffres.

En 2010, Casarini et Clementi ont utilisé cette machine lors de trois séances effectuées en CM1 sur le système d'écriture des nombres.

La première séance est centrée sur la découverte et l'exploration de l'artéfact par un travail en binôme où les élèves répondent à plusieurs questions (« comment est faite cette machine ? », « Que fait-elle ? », « Qu'affiche-t-elle ? », etc.). Les élèves et l'enseignant mettent en commun les différents signes produits dans l'activité lors d'une discussion collective. Cette discussion collective est le moyen pour l'enseignant de faire formuler aux élèves leurs hypothèses sur l'usage et le fonctionnement de la machine.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de dessiner la machine Zero+1 pour que lors de la séance 2, ils la reconstruisent en papier pour vérifier l'organisation des composantes et le sens de rotation des roues.

Lors de la troisième séance, les élèves doivent « écrire le nombre 13 sur la machine » et expliquer comment ils ont fait pour l'écrire. Les élèves vont procéder par itération ou par décomposition. La discussion en commun qui suit ce travail vise la construction sociale des deux méthodes utilisées pour écrire les nombres.

La méthode par itération consiste à tourner 13 fois la première roue jaune (10 fois pour enclencher une fois la deuxième roue et 3 fois pour afficher 3 sur la première roue).

La méthode par décomposition consiste à tourner 3 fois la première roue jaune pour afficher les 3 unités du nombre 13 et à tourner une fois la deuxième roue jaune pour afficher la dizaine du nombre 13.

Selon moi, cette machine pourrait être davantage utile au collège notamment lors des processus de formulation de conjectures et d'argumentation. Son utilisation en école élémentaire est assez limitée contrairement à d'autres artéfacts que nous avons vu précédemment.

Dans ces deux exemples de mise en place, la formulation des consignes est mise en évidence afin de faire émerger aux élèves des significations personnelles liées à l'utilisation de l'artéfact pour accomplir une tâche. Le travail à la charge de l'enseignant pour lier ces significations aux mathématiques est également mis en avant dans cet article.

4 L'utilisation de l'abaque à jeton et du boulier chinois dans une classe de CE1.

L'article « De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1 » de Caroline Poisard, Isabelle Cochet et Dominique Tournes présente une expérience menée en classe de CE1 par un professeur.

Cette enseignante a décidé d'intégrer dans sa classe l'utilisation de l'abaque à jeton et du boulier chinois.

Dans sa séquence, l'enseignante vise plusieurs objectifs : « comprendre et réaliser des échanges entre les rangs, comprendre la notion de valeur et quantité ».

Elle a choisi de débiter sa séquence avec l'abaque à jeton pour introduire le boulier.

Ce choix repose sur la souplesse qu'offre l'abaque par rapport au boulier. En effet, le nombre de jeton sur chaque rang est libre et peut largement dépasser celui présent sur le boulier chinois (2 quinaires et 5 unaires maximum sur chaque tige).

Ensuite, le boulier chinois permet de travailler avec les grands nombres plus aisément grâce à son nombre de rang (ou tige) élevé (13 ou 15 en général).

Cette enseignante met à disposition les abaques et les bouliers comme ressources matérielles pour les élèves et utilise le TBI comme ressource virtuelle pour les phases de discussion, de mise en commun.

Afin de laisser une trace dans le travail effectué par les élèves, l'enseignante distribue également des fiches que les élèves remplissent (dessiner le bon nombre de jeton dans chaque case).

Enfin, l'enseignante met l'accent sur les synthèses écrites après les mises en commun afin de bien voir ce qui a été fait et réalisé en classe. Pour faire comprendre aux élèves la différence entre valeur et quantité de jeton sur l'abaque, l'enseignante propose une fiche de synthèse sur l'échange de 5 unaires contre 1 quinaire et sur l'échange du 10 (utilisation d'une ou deux colonnes). Ces étapes constituent l'institutionnalisation.

Puis l'enseignante introduit le boulier chinois pour travailler un champ numérique plus large. Elle continue d'articuler des ressources matérielles (bouliers, fiches, ardoises) et virtuelles (TBI, logiciel sur ordinateur) afin de permettre le travail en autonomie.

Après cette expérience, l'enseignante juge que ses élèves acquis des connaissances renforcées en numération par rapport aux années antérieures. L'utilisation de ces instruments est donc encourageant en ce qui concerne les apprentissages des élèves.

5 L'apport du boulier chinois en calcul mental.

« Quelles sont les potentialités du boulier chinois pour l'enseignement de procédures de calcul mental en CE1 ? Quelles sont les difficultés des élèves en calcul mental pour lesquelles le boulier chinois pourrait constituer une aide ? Quels sont les apprentissages réalisés par les élèves dans cette séquence de calcul mental avec le boulier chinois en CE1 ? Comment le

boulier chinois s'articule-t-il avec les autres artefacts utilisés lors de cette séquence de calcul mental ? »

Dans l'article « le calcul mental à l'école : les apports du boulier chinois » de la revue MathémaTICE publié par Laetitia Bueno-Ravel et Christine Harel, il est question de l'utilisation du boulier chinois afin d'aider les élèves en calcul mental.

Dans cet article, les auteurs réfléchissent à la mise en place d'une séquence visant à transmettre des procédures aux élèves afin d'effectuer des calculs raisonnés ou réfléchis. Ainsi grâce à cette séquence, les élèves ont évolué d'une procédure de calcul mental par comptage vers une procédure de calcul.

Dans cette séquence, le boulier chinois est d'abord utilisé comme outil de recherche de solution. Ensuite, il servira comme outil de validation du résultat.

Cette séquence constituée de 9 séances vise dans un premier temps à transmettre aux élèves des procédures de calcul pour ajouter 9, 8 et 7 à un nombre. Ensuite cette séquence vise à transmettre des procédures de calcul pour ajouter 6, 5 et 4, 3, 2 et 1 à un nombre.

Le but est d'amener les élèves à écrire des suites d'égalités représentant toutes les étapes du calcul à partir de l'utilisation du boulier chinois.

Les élèves peuvent alors éventuellement développer des procédures de calcul raisonné prenant appui sur les propriétés du boulier, notamment l'appui sur le 5 avec l'activation de quinaires et les échanges 5 (5 unaires activées) contre 1 (1 quinaire activée) ou 10 (vu comme $1+1+1+1+1+5$ lorsque 5 unaires unités et 1 quinaire unité sont activées ou comme $5+5$ lorsque 2 quinaires unités sont activées) contre 1 (une unaire de la tige des dizaines).

Prenons l'exemple cité dans l'article.

Pour ajouter 8 à un nombre, en utilisant le boulier chinois dans un premier temps puis en écrivant les étapes du calcul, l'élève va découvrir plusieurs procédures de calcul :

- En complétant la dizaine supérieure en décomposant le 8.

$$37 + 8 = 37 + 3 + 5 = 40 + 5 = 45.$$

- En ajoutant une dizaine entière et en enlevant 2 unités.

$$37 + 8 = 37 + 10 - 2 = 47 - 2 = 45.$$

- En utilisant les doubles.

$$38 + 8 = 30 + 8 + 8 = 30 + 16 = 46.$$

Au cours de cette séquence, les auteurs observent bien une évolution des élèves utilisant une technique de comptage vers une technique de calcul.

Cette utilisation du boulier chinois va donc être bénéfique aux élèves. Cependant, selon moi, pour y parvenir, l'élève doit avoir acquis et compris l'utilisation du boulier chinois. Cette compréhension de l'utilisation du boulier chinois peut être difficile pour certains élèves et donc devenir un obstacle pour l'apprentissage de ces élèves. En effet, les élèves doivent intégrer la notion de quinaire alors qu'ils sont habitués à utiliser uniquement les unités et les dizaines. De plus les élèves doivent être à l'aise avec les échanges tels qu'un quinaire = 5 unaires et doivent comprendre les valeurs de positions (une unaire unité est différente d'une unaire dizaine).

6 Un instrument pour la lecture et l'écriture des nombres

Habituellement, les nombres étudiés en lecture en CP (cycle 2) sont les nombres de 0 à 100. Cependant, il existe un instrument mathématique permettant d'aborder les nombres de 1 à 999 dès le CP. Cet instrument est formé de cartes que l'on appelle des cartes numérales.

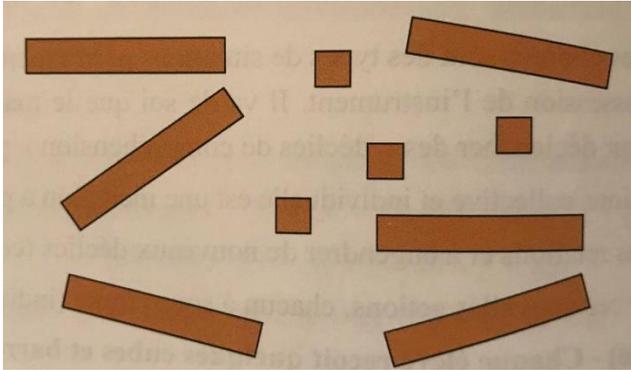


A l'aide de ces cartes, les enfants doivent apprendre les noms écrits et oraux des 16 nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 200, et les repérer sur les cartes. Les éléments tels que 300, ..., 900 sont faciles à deviner en les comparant à 200. Les enfants peuvent alors former tous les nombres de 1 à 999 par superposition de 1, 2 ou 3 cartes de taille décroissante, la bande orange, à droite de chacune, servant de repère. Mais en raison du choix historique fait en France pour les nombres de 70 à 99, ceux-ci seront traités séparément et plus tard.

Ainsi, lorsque les élèves auront appris les 16 nombres précédemment cités, ils pourront recomposer tous les nombres. Par exemple, l'enseignant prononce le nombre 352. Les élèves vont extraire les trois cartes qu'ils ont entendu (trois-cents, cinquante, deux). L'enseignant fait repérer la bande orange qui permet de superposer les différentes cartes. L'enseignant peut

même énoncer et écrire l'égalité $352 = 300 + 50 + 2$. Cela permet une meilleure compréhension du nombre et de la décomposition d'un nombre.

7 Les cubes et barres de cinq cubes



Les manipulations, ancêtres des algorithmes écrits, ont longtemps été utilisé pour réaliser les calculs des savants.

Ici, nous nous intéresserons à la manipulation sous forme de groupement par 5. Il apparaît comme le groupe le plus simple et naturel pour aborder les nombres montrés avec les doigts. Cet instrument est composé de cubes de bois et de barres de même section, de longueur d'un train de cinq cubes. Pour travailler les nombres de 1 à 10, les élèves auront donc besoin de deux barres et cinq cubes.

Cet instrument permet de déclencher des déclics de compréhension pour tous les élèves. En manipulant ces cubes et ces barres, les élèves peuvent comparer plusieurs trains et ainsi visualiser l'ordre numérique : train le plus long correspond au nombre le plus grand.

Les élèves vont également connaître des difficultés pour deviner le nombre représenté par les cubes et les barres placés en vrac sur leur table. Mais en organisant ces barres et ces cubes, les élèves vont découvrir qu'ils n'auront plus besoin de compter (deux barres l'une après l'autre font dix, six barres et trois cubes font trente et trois donc trente-trois, ...).

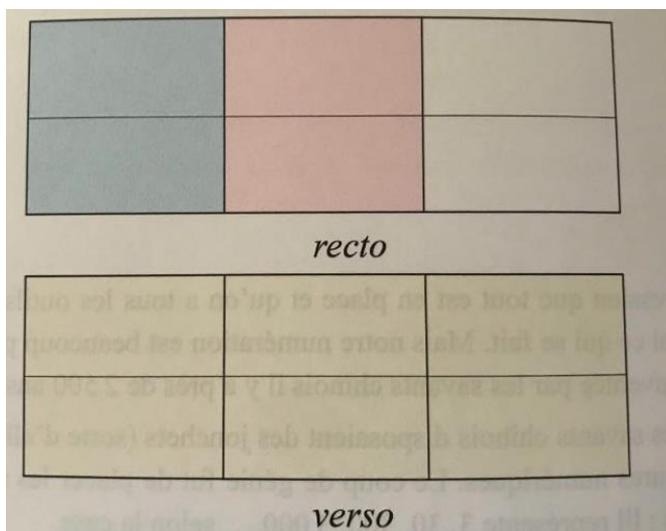
8 L'abaque en couleur

8.1 Numération de position en cycle 2

Comme nous l'avons vu précédemment, notre numération intègre l'idée géniale inventée par les savants chinois sur la valeur de position des nombres. Cette pratique vise à utiliser les

mêmes symboles à des positions différentes pour représenter les unités, dizaines, centaines, ...

Ainsi, pour travailler sur cette numération décimale, il existe un instrument mathématiques appelé « l'abaque en couleur ». Il s'agit d'une bande recto-verso colorée, formée de trois carrés, obtenue par découpage en deux dans le sens de la longueur d'une feuille A4 plastifiée (voir annexe). Cet abaque est formé au recto de deux cases blanches (toujours à droite), deux cases roses et deux cases bleues. Le verso (couleur jaune) servira lors de la découverte des nombres décimaux en cycle 3. Ainsi, la case blanche représente les unités, la case rose représente les dizaines et la case bleue représente les centaines.



Le fait d'avoir travaillé les nombres jusqu'à 999 avec les cartes numérales va permettre aux élèves de comprendre la logique de cette nouvelle présentation des nombres.

Ainsi, il sera très utile d'utiliser ces différentes méthodes (une fois travaillées et maîtrisées par les élèves) au sein d'une même situation.

Prenons un exemple de situation pour illustrer mes propos.

Il est possible de demander aux élèves de transposer une carte numérale sur l'abaque en couleur tout en utilisant les cubes et les barres de cinq cubes. « On place les « uns » sur la case blanche, les « dix » sur la case rose, et les « cent » sur la case bleue ».

Cela permet une meilleure représentation du nombre et permet par la suite une traduction dynamique des opérations arithmétiques grâce à la mobilité des cubes et des barres.

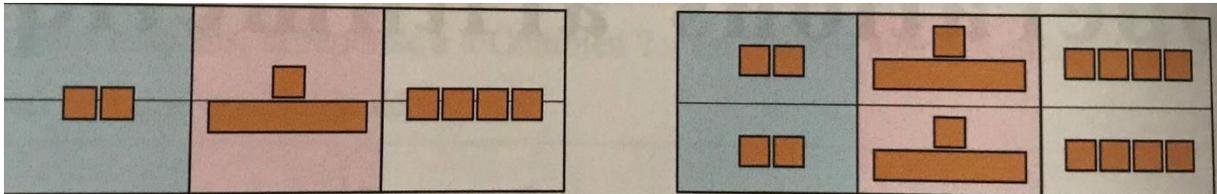
L'abaque étend le champ d'exploration des nombres.

8.2 Opérations arithmétiques

L'abaque en couleur possède une médiane pointillée permettant de placer deux nombres simultanément (un au-dessus, un au-dessous).

En plaçant un nombre une fois au-dessus et une fois au-dessous, l'élève pourra aborder la duplication. Cette action de doubler est la plus simple à faire en calcul mental et elle joue un rôle essentiel dans la compréhension de la multiplication et de la division.

Par exemple, si l'élève veut doubler 264, il obtiendra 8 cubes dans la partie blanche, deux barres et deux cubes dans la partie rose et 4 cubes dans la partie bleu. Les deux barres de la partie rose (dizaine) forment une centaine donc se transforme en un cube dans la partie bleu. L'élève aura juste à lire l'abaque en couleur pour trouver le résultat : $264 + 264 = 528$.



En plaçant deux nombres différents (un au-dessous, un au-dessus) sur l'abaque, l'élève pourra aborder l'addition.

L'utilisation de cet abaque en couleur n'impose pas d'ordre dans les manipulations, on peut transformer d'abord les « uns », les « cents » ou les « dix ».

L'élève procède comme il veut mais lorsque deux barres sont dans une même case (10 unités ou 10 dizaines), on ajoute un cube dans la case de gauche (dizaine ou centaine).

Le fait de représenter un nombre sur l'abaque en couleur apporte également une meilleure compréhension de la décomposition du nombre. Cela permet de décomposer un nombre de différentes façons. Soit l'élève décompose le nombre en prenant en compte chaque couleur et son nombre de cube ou barre. Soit l'élève prend en compte deux couleurs et la couleur restante séparément.

Par exemple, prenons le nombre 228. Ce nombre représenté dans l'abaque en couleur sera le suivant :

2 cubes dans la case bleu (centaines), 2 cubes dans la case rose (dizaines), 1 barre et 3 cubes dans la case blanche (unités).

L'élève pourra ainsi décomposer se nombre de plusieurs façons :

$$228 = 200 + 20 + 8$$

$$228 = 2 \times 100 + 2 \times 20 + 8$$

$$228 = 208 + 20$$

$$228 = 220 + 8$$

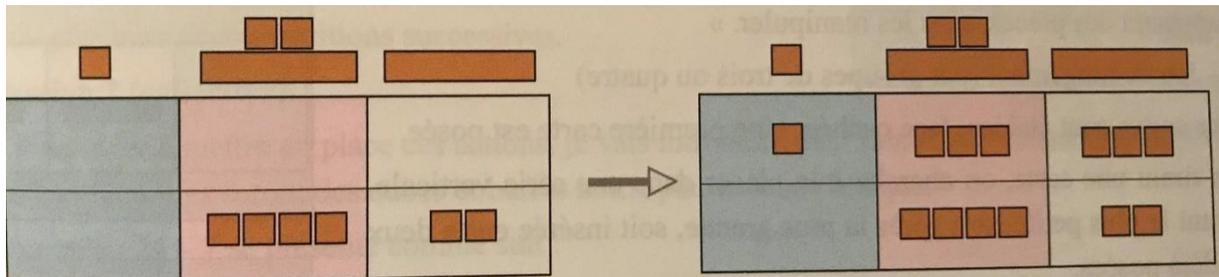
$$228 = 22 \times 20 + 8$$

Il est également possible de travailler les compléments à l'aide de cet abaque.

Pour travailler les compléments à 100, par exemple, il suffit de placer le nombre en-dessous de la ligne pointillée et de placer un cube au-dessus de la case bleu (une centaine). L'élève va ainsi placer les cubes ou barres manquants dans les cases au-dessus de la ligne pointillée pour arriver à 100.

Il est possible d'effectuer cette méthode avec n'importe quels nombres. Par exemple, l'élève pourra chercher combien doit-on rajouter à 42 pour faire 175.

Ainsi, l'élève pourra utiliser cette méthode pour résoudre des opérations comme : $42 + \dots = 175$. La réponse est 133.



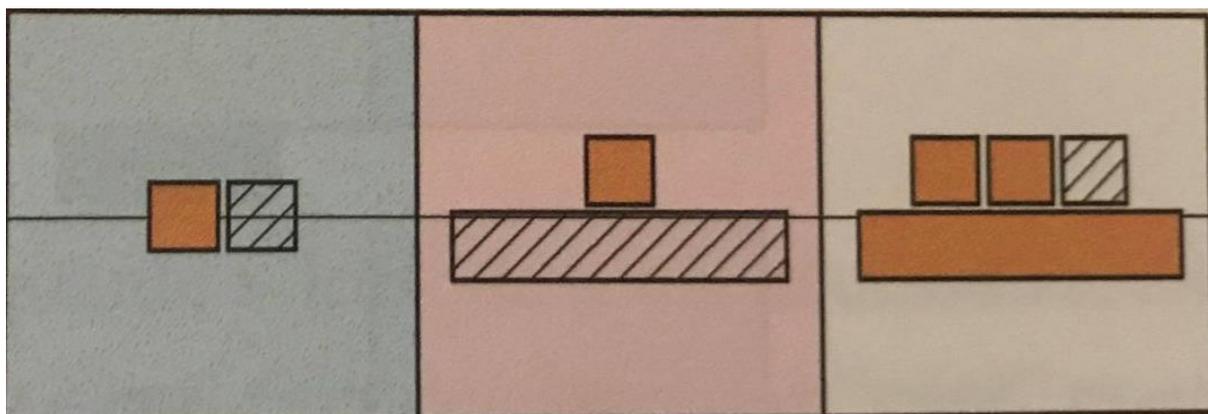
La soustraction peut également être abordée à l'aide de cet abaque en couleur.

Pour réaliser des soustractions simples, l'élève place le nombre le plus grand sur l'abaque.

Ensuite il prend les pièces (cubes ou barres) du nombre à retirer.

Par exemple, le nombre 268 est placé comme ceci : 2 cubes dans la partie bleu (centaines), une barre et 1 cube dans la partie rose (dizaines) et une barre et 3 cubes dans la partie blanche (unités).

Si l'on veut soustraire 151 à ce nombre, il suffit d'enlever un cube dans la partie bleu, une barre de la partie rose et un cube de la partie blanche. Il restera 1 cube dans la partie bleu, 1 cube dans la partie rose et une barre et 2 cubes dans la partie blanche. Le nombre restant est le résultat de cette soustraction : 117.



Mais lorsque l'on veut effectuer des soustractions plus complexes, il faudra décomposer un « dix » en deux « cinq » (une dizaine en 2 fois 5 unités par exemple).

Pour aider à mettre en place ces actions, nous pouvons introduire des cubes et barres fantômes venant chercher chacun sa proie. Les fantômes sont placés sous les cases de couleur de l'abaque.

Lorsque c'est nécessaire, l'élève devra décomposer les centaines en 10 dizaines ou les dizaines en 10 unités pour que les fantômes puissent manger leur proie située dans leur couleur.

En réduisant, case par case, les couples fantômes-pièces, on obtient de manière générale :

- des cases contenant des pièces beiges, mais plus de fantômes (si le nombre de pièces beiges était supérieur au nombre de fantômes).
- des cases vides, mais avec des fantômes insatisfaits (si le nombre de pièces beige était inférieur au nombre de fantômes).
- des cases vides (si le nombre de pièce beige était égal au nombre de fantômes).

Par cette réduction de toutes les paires pièces-fantômes, soit tous les fantômes ont disparu, soit on est ramené aux cas précédents. Les élèves doivent donc savoir résoudre ces quatre cas pour effectuer toute soustraction sur les nombres inférieurs à 1000.

9 Le fonctionnement du boulier chinois.

9.1 Quelques informations.

Lorsqu'aucune boule n'est située contre la barre centrale, le boulier est à zéro (lorsque les boules de la partie supérieure sont situées vers le haut et lorsque les boules de la partie inférieure sont situées vers le bas).

Chaque tige représente une puissance de 10, la tige tout à droite représente les unités. Ainsi la deuxième tige représente les dizaines, la troisième représente les centaines et ainsi de suite. Les boules de la partie inférieure valent 1 et les boules de la partie supérieure valent 5. On les nomme respectivement les boules unaires et les boules quinaires.

Le fait qu'il y ait deux boules quinaires et cinq boules unaires, chaque nombre possède différentes écritures. Par exemple le chiffre 5 peut s'écrire de la façon 1 boule quinaire ou 5 boules unaires.

Cependant, dans l'usage courant, on fait en sorte d'utiliser le moins de boules possible.

Pour écrire le nombre 132 par exemple, il faut :

- monter deux boules unaires sur la dernière tige.
- monter trois boules unaires sur l'avant dernière tige.
- monter une boule unaire sur la troisième tige en partant de la droite.

9.2 Quelques règles :

9.2.1.1 Pour ajouter :

- 1 : ajouter 5 (une quinaire ou cinq unaire) et enlever 4 (unaires) ou ajouter 10 et enlever 9
- 2 : ajouter 5 et enlever 3 ou ajouter 10 et enlever 8
- 3 : ajouter 5 et enlever 2 ou ajouter 10 et enlever 7
- 4 : ajouter 5 et enlever 1 ou ajouter 10 et enlever 6
- 5 : ajouter 5 ou ajouter 10 et enlever 5
- 6 : ajouter 5 et ajouter 1 ou ajouter 10 et enlever 4
- 7 : ajouter 5 et ajouter 2 ou ajouter 10 et enlever 3
- 8 : ajouter 5 et ajouter 3 ou ajouter 10 et enlever 2
- 9 : ajouter 5 et ajouter 4 ou ajouter 10 et enlever 1.

9.2.1.2 Pour soustraire :

- 1 : enlever 5 et ajouter 4 ou enlever 10 et ajouter 9
- 2 : enlever 5 et ajouter 3 ou enlever 10 et ajouter 8
- 3 : enlever 5 et ajouter 2 ou enlever 10 et ajouter 7
- 4 : enlever 5 et ajouter 1 ou enlever 10 et ajouter 6
- 5 : enlever 5 ou enlever 10 et ajouter 5
- 6 : enlever 5 et enlever 1 ou enlever 10 et ajouter 4
- 7 : enlever 5 et enlever 2 ou enlever 10 et ajouter 3

8 : enlever 5 et enlever 3 ou enlever 10 et ajouter 2

9 : enlever 5 et enlever 4 ou enlever 10 et ajouter 1

9.3 L'utilisation de ce boulier à l'école.

Cet instrument aisé à manipuler peut permettre de réaliser une série de travaux où l'expérimentation individuelle et collective occupe une place conséquente.

9.3.1 En cycle 1.

L'utilisation du boulier peut intervenir dès la maternelle grâce au boulier.

En effet, les premiers apprentissages du nombre sont fondamentaux et ne se réduisent pas à « savoir compter ». Les élèves doivent être capables de résoudre des problèmes qui donnent du sens aux nombres. La connaissance de la comptine numérique est indispensable.

L'association entre l'écriture chiffrée des nombres et le nom des nombres est également un objectif de la maternelle.

Ainsi, par l'utilisation du boulier en GS, par exemple, les élèves vont pouvoir réaliser différentes tâches en lien avec les apprentissages cités précédemment.

En effet, des tâches de lecture et des tâches d'inscription de nombre compris entre 0 et 10 pourront être abordées avec une classe de GS grâce au boulier d'école. L'enseignant, par l'utilisation du boulier d'école, pourra effectuer des activités qui consistent à repérer le nombre de boules activées sur le boulier. Ce boulier peut être utilisé notamment lors du rituel du matin pour compter les élèves. Chaque élève, lors de son arrivée, actionne une boule.

L'enseignant pourra ainsi utiliser ce support pour compter avec l'ensemble de la classe les élèves qui sont présents.

9.3.2 En cycle 2.

Les élèves doivent pouvoir l'utiliser pour dénombrer des nombres, des quantités

La décomposition des nombres permet aux élèves de mieux comprendre les nombres.

L'enseignant pourra également se fier aux différentes techniques utilisées par les élèves pour analyser les connaissances acquises par ses élèves.

Par exemple, l'enseignant demande aux élèves d'inscrire le chiffre 7 sur le boulier chinois. De part cette consigne, plusieurs méthodes de résolution peuvent être réalisées par les élèves.

- L'élève peut activer une quinaire en récitant sa comptine (un, deux, trois, quatre, cinq) puis activer une unaire en disant « six » puis une autre unaire en prononçant « sept ». Cet élève utilise la technique du comptage.
- L'élève peut activer une quinaire et deux unaires en une fois sur la tige des unités. L'élève aura décomposé le chiffre sept en une addition ($7 = 5 + 2$).
- L'élève peut activer cinq unaires en comptant (un, deux, trois, quatre, cinq) puis échanger ces cinq unaires contre une quinaire sur la tige des unités puis activer deux unaires en continuant de compter (six, sept). Il s'agit du comptage et du regroupement de cinq unaires en une quinaire.
- L'élève peut activer une quinaire et cinq unaires sur la tige des unités puis désactiver trois unaires. L'élève aura utilisé la méthode du décomptage de dix à sept.

L'utilisation du boulier est efficace pour faire comprendre la décomposition des nombres aux élèves.

En travaillant sur les nombres de 10 à 15 par exemple, l'enseignant peut renforcer les connaissances sur le nombre (comptine, comptage, surcomptage, ...) et sur la décomposition additive des nombres.

L'enseignant peut demander aux élèves d'inscrire le nombre 15 sur leur boulier. Ainsi les élèves vont obtenir différents résultats et cela permettra de faire comprendre aux élèves la décomposition additive. Pour réaliser cet exercice, l'élève pourra :

- Activer deux quinaires et cinq unaires sur la tige des unités en une fois ou en comptant. Le raisonnement de l'élève s'appuie sur la décomposition additive de quinze suivant : $15 = 5 + 5 + 5$ ou $15 = 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.
- Activer une unaire sur la tige des dizaines et cinq unaires sur la tige des unités l'une après l'autre en comptant (onze, douze, treize, quatorze, quinze). L'élève active une dizaine qui correspond à 10 puis il surcompte jusqu'à obtenir quinze.
- Activer une unaire sur la tige des dizaines et cinq unaires ou une quinaire sur la tige des unités en un seul geste. Ici, l'élève décompose le nombre quinze en l'addition de $10 + 5$. ($15 = 10 + 5$).

Ainsi, l'utilisation du boulier sera bénéfique aux élèves mais également à l'enseignant qui, en observant ses élèves, pourra se rendre compte de leurs acquis et des méthodes qu'ils utilisent. Il permet également une réelle différenciation dans l'enseignement des mathématiques.

9.3.3 En cycle 3.

Pour travailler sur l'addition et la soustraction en CM, ce boulier peut être utilisé en quatre temps :

La lecture du boulier.

Décrire le rôle des boules unaires et des boules quinaires et proposer l'écriture de quelques nombres bien choisis au boulier chinois.

Attirer l'attention des élèves sur les différentes écritures possibles de certains nombres.

Addition de nombres à un chiffre.

Donner des séries d'additions aux élèves puis leur transmettre différents types de manipulations.

Expliquer les notions de complément à 10 et à 5.

Apprendre aux élèves les manipulations des unaires et quinaires (quels doigts utiliser, comment, ...).

Addition de nombres à plusieurs chiffres.

Proposer aux élèves d'effectuer des additions de nombres à plusieurs chiffres en procédant de gauche à droite sur le boulier. Mettre ensuite en commun pour faire ressortir les avantages du boulier sur la gestion des retenues dans les opérations posées.

Soustraction.

Proposer aux élèves quelques soustractions de nombres à plusieurs chiffres pour faire ressortir la relation de la soustraction à l'addition en tant qu'opération inverse et pour tirer les avantages de l'utilisation du boulier.

Multiplication.

Ensuite, un travail sur les multiplications et les divisions peut être effectué lorsque les élèves sont à l'aise avec le boulier.

10 Quel boulier utiliser en classe ?

Le boulier un support qui permet d'aider les élèves en difficulté ou d'accompagner les élèves dans leurs apprentissages.

10.1 Le boulier chinois.

Un nombre peut être représenté de plusieurs manières sur le boulier chinois étant donné que l'on peut écrire jusqu'à 15 dans chaque tige. Cela permet aux élèves d'effectuer les échanges possibles après avoir terminé leur calcul pour rendre l'écriture économique (activer le moins de boules possible). Cela évite donc aux élèves de trop réfléchir, penser, pendant qu'ils effectuent un calcul.

Les manipulations effectuées sur ce boulier sont proches de celle la technique algorithmique utilisée à l'école. Ainsi, le boulier chinois est plus qu'utile pour aborder l'enseignement des opérations en mathématiques.

10.2 Le boulier japonais.

Il est proche du boulier chinois mais possède une quinaire et une unaire en moins sur chaque tige. Ainsi chaque nombre possède une représentation unique dans ce boulier car les unités, dizaines, centaines, ... sont limités à 9.

Sur ce boulier, les opérations s'effectuent de gauche à droite ce qui diverge de la procédure utilisée dans algorithmes de calcul. C'est pourquoi ce boulier n'est pas utilisé pour accompagner les élèves à l'école.

10.3 Le boulier à tige.

Ce boulier qui comporte quatre tiges permettant chacune d'empiler jusqu'à neuf perles est un support pour faire comprendre aux élèves l'aspect position de la numération. Ce boulier permet également les échanges (échanger dix boules d'une tige contre une boule de la tige située directement à gauche) et permet de garder des tiges vides (aspect décimal).

10.4 Le boulier russe « ikea ».

Ce boulier comporte dix tiges composées chacune de dix boules.

Ce boulier peut être utiliser de deux manières différentes :

- Chaque boule à une valeur identique (une unité) peu importe sur la tige où elle se trouve (permet de traiter les nombres de 0 à 100).

- Chaque boule à une valeur différente selon sa position (tige) sur le boulier (numération de position).

Ainsi ce boulier russe peut être utilisé pour travailler sur le dénombrement et la mémoire de la quantité, sur les compléments à 10, sur la décomposition additive du nombre 10, sur la numération de position décimale, sur les grands nombres et sur les opérations.

Le dénombrement pose beaucoup de problèmes aux élèves à l'école primaire. En effet, il est important d'organiser le dénombrement afin de ne pas oublier ou de ne pas compter deux fois un élément. L'élève doit donc pointer correctement tous les éléments et réciter la comptine numérique. Cela peut poser un problème à l'élève. Le boulier peut s'avérer donc utile en utilisant d'abord les compétences d'énumération en procédant à de la correspondance terme à terme en déplaçant les boules une par une sur le boulier. Ensuite, en comptant les boules de chaque ligne, les élèves vont se rendre compte de la quantité présente sur chaque ligne sans devoir la dénombrer à chaque fois. L'enseignant peut, grâce à cette mémorisation des élèves, proposer une activité où il active un certain nombre de boules et où les élèves doivent trouver le nombre correspondant. Les élèves vont s'appuyer sur le groupement par 10 pour dénombrer la quantité de boules activées. Si l'enseignant active une ligne complète, l'élève va instinctivement annoncer 10. Si l'enseignant active 9 boules sur une ligne, l'élève va directement voir une boule restante sur la ligne et effectuer le calcul dans sa tête $10 - 1 = 9$. Si l'enseignant active 4 lignes et 4 boules, l'élève va observer qu'il y a 4 dizaines donc $10 + 10 + 10 + 10$ et 4 unités donc il va annoncer rapidement le résultat 44.

Ce boulier permet aussi de travailler les opérations d'addition et de soustraction. L'enseignant peut par exemple travailler sur les compléments à 10 ($2 + ? = 10$, ...) et sur les différentes décompositions additives de 10 ($10 + 0$; $9 + 1$; $8 + 2$; ...).

Pour travailler les grands nombres, il est possible d'assimiler à chaque ligne une valeur différente. La première ligne représente les unités, la seconde représente les centaines, la troisième représente les milliers, et ainsi de suite. L'enseignant pourra donc demander aux élèves d'effectuer des opérations plus ou moins complexes tels que $1\ 000\ 000 - 1$ ou $1\ 000\ 000 - n$.

III Expérimentations.

1 Présentation de ma classe.

Ma classe est composée de 27 élèves (9 CE2 et 18 CE1). Le niveau des élèves est assez hétérogène et beaucoup d'élèves ont des difficultés plus au moins grandes. Le confinement de l'année passée a causé, à juste titre, un certain retard chez la plupart des élèves. En effet, 12 élèves ont un Programme Personnalisé de Réussite Educative.

Un bon nombre des élèves de ma classe se déconcentrent et se dissipent assez facilement. Il est donc important de mettre en place des séances où les élèves manipulent et ressentent du plaisir pour les engager dans les apprentissages et pour maintenir leur attention.

Les difficultés de mes élèves se ressentent également en mathématiques et particulièrement en calcul et numération.

Etant stagiaire à mi-temps, j'aborde les notions « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie » avec mes élèves. Ma collègue aborde les notions de numération et de calcul.

Cependant je travaille chaque jour avant chaque récréation le calcul mental et la résolution de problèmes.

C'est sur cette notion du calcul mental que ma mise en pratique va s'appuyer.

Au début de l'année, j'ai pu me rendre compte des difficultés de mes élèves et sur quoi il était important de travailler.

En ce qui concerne les notions de calcul, mes élèves ne connaissaient pas leurs compléments à 10 et avaient des difficultés à différencier les unités des dizaines et des centaines.

Il était donc important de commencer là où les élèves avaient des difficultés car sans certaines notions de base, la suite du travail ne pouvait être réalisé.

2 Présentation du projet.

En tenant compte des caractéristiques de mes élèves et des contraintes de mon intervention, j'ai choisi d'utiliser le boulier d'école afin de travailler plusieurs compétences des programmes en liens avec le calcul mental.

Ce projet a été mis en place quotidiennement lors de moments courts (15-20 minutes) consacrés au calcul mental.

La mise en place de l'utilisation du boulier vise à travailler progressivement différents objectifs. Ces objectifs sont tout d'abord de travailler les bases du calcul mental pour ensuite

acquérir des stratégies ou des procédures de calcul que nous verrons en détail. Nous verrons au cours de ce projet les différentes étapes mises en place et nous observerons leur efficacité sur les élèves.

2.1.1 Activité pour présenter le boulier.

Avant de commencer à utiliser le boulier d'école, je l'ai présenté aux élèves et j'ai analysé les représentations des élèves sur cet instrument. Le fait de questionner les élèves sur cet objet qu'ils découvrent a attisé leur curiosité. De plus, les élèves apprécient beaucoup l'utilisation de nouveaux matériels.

Après avoir demandé aux élèves de quel objet il s'agissait et comment pourrions-nous l'utiliser, j'ai présenté et expliqué l'instrument à mes élèves.

Il est important de donner aux élèves les objectifs à atteindre que permettra cet instrument pour donner du sens et pour engager les élèves dans les apprentissages.

Je leur ai dit que cet instrument nous servirait à apprendre des astuces pour calculer plus rapidement et plus facilement.

Pour attiser leur curiosité et montrer aux élèves l'efficacité de ce boulier, je leur ai demandé de me donner des calculs à effectuer. Quelques élèves utilisaient leur calculatrice pour vérifier le résultat. Selon les calculs qu'ils me demandaient, je procédais avec différentes méthodes et j'annonçais le résultat rapidement. Je leur ai bien expliqué que cela prendrait du temps pour qu'ils parviennent à le reproduire mais que ce serait tout à fait possible à condition de bien travailler.

2.1.2 Observation des élèves :

La présentation de l'instrument a intrigué les élèves et ils ont trouvé ça beau (les billes des couleurs différentes). Les élèves ont eu plusieurs idées d'utilisation de ce boulier mais les idées tournaient autour du fait de compter quelque chose. Que ce soit le nombre d'élèves, le nombre de jour d'école, les élèves voyaient ça plutôt comme un instrument pour dénombrer des éléments.

Lorsque j'ai présenté l'utilité de cet instrument et expliqué comment il pourrait les aider, les élèves étaient un peu sceptiques. Certains ne comprenaient pas comment cet instrument pourrait les aider à calculer plus vite et plus facilement.

Mais lorsque j'ai utilisé moi-même le boulier et que j'ai calculé très rapidement les calculs que les élèves me proposaient, les élèves ont été comme subjugué. Ils ont été très surpris et m'ont demandé s'ils parviendraient, eux aussi, à calculer aussi vite.

2.2 Activité pour comprendre l'utilisation du boulier.

Lors de la première utilisation du boulier, l'objectif était de faire comprendre aux élèves l'utilisation du boulier, c'est-à-dire que lorsque les boules sont à gauche, elles ne comptent pas et lorsque les boules sont à droite, elles sont dites actives et comptent. L'objectif était aussi de faire comprendre aux élèves que chaque boule vaut une unité.

Les compétences travaillées dans cette séance sont :

- Lire et nommer des nombres entiers.
- Dénombrer des collections.

J'ai tout d'abord montré aux élèves que les boules se déplaçaient sur des tiges et que lorsque les boules étaient d'un côté ou de l'autre de la tige, cela changeait beaucoup de chose. Je leur ai expliqué que lorsque les boules étaient contre la partie gauche, elles ne comptaient pas. Je leur ai expliqué que pour que des boules soient « actives » et comptent, il fallait qu'on les déplace sur la partie droite du boulier. Je montre également aux élèves comment remettre le boulier à zéro.

J'ai ensuite abordé la valeur des boules en questionnant les élèves. Ils ont instinctivement répondu : « une boule vaut 1 ». C'est bien la valeur que nous attribuons à chaque boule.

Je leur ai demandé de sortir leur ardoise pour commencer ce premier travail avec le boulier.

Les élèves devaient écrire sur leur ardoise le nombre qui correspondait aux boules actives sur le boulier que j'affichais.

J'ai commencé par des exercices simples en activant peu de boules (3 boules, puis 5, puis 2, puis 4, etc.) pour que tous les élèves soient en réussite.

Puis lors de la seconde étape, les élèves viennent au tableau activer les boules du boulier pour qu'il affiche le nombre que je demande.

Je demande ensuite aux élèves comment on affiche 10 sur le boulier afin qu'ils assimilent qu'une ligne est égale à 10 unités ou une dizaine.

2.3 Activité pour découvrir les compléments à 10.

La deuxième activité de ce projet a pour objectif de découvrir et d'apprendre les compléments à 10.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Mémoriser des faits numériques et des procédures : décompositions additives de 10, compléments à la dizaine.

J'ai d'abord expliqué ce qu'on appelait les compléments à 10 en reformulant la définition des compléments à 10 qui est : « Les compléments à 10 représentent les chiffres qu'il faut ajouter à un chiffre connu pour atteindre 10 ».

Ensuite, les élèves sont placés par groupe et ont un boulier d'école. Ils doivent trouver tous les compléments à 10 en utilisant le boulier d'école. Ils retranscrivent ensuite ce qu'ils ont trouvé sur leur cahier de brouillon.

Les élèves doivent manipuler les boules sur une ligne du boulier pour découvrir tous les compléments à 10 existants.

Par exemple : L'élève active une boule. Il observe que 9 boules ne sont pas activées. Il en déduit que $9 + 1 = 10$ ou $1 + 9 = 10$.

Lorsque les groupes ont trouvé plusieurs compléments à 10, nous mettons en commun.

Puis nous construisons, ensemble, un affichage qui sera affiché au mur en guise d'institutionnalisation.

2.4.1 Activité pour travailler et mobiliser les compléments à 10.

Lors de la séance précédente, les élèves ont découvert les compléments à 10.

Cette séance vise donc à mobiliser et travailler ce qu'ils ont appris afin qu'ils sachent par cœur leurs compléments à 10.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Mémoriser des faits numériques et des procédures : décompositions additives de 10, compléments à la dizaine.

La procédure de cette séance est un peu similaire à certains albums visant à travailler sur les compléments à 10.

Pour commencer, je me place au tableau avec le boulier d'école dans les mains.

J'active un certain nombre de boules sur la première ligne et les élèves doivent trouver le nombre de boules qui ne sont pas activées.

Au début je ne cache pas les boules, puis par la suite, celles-ci sont cachées par ma main droite.

Les élèves écrivent leur réponse sur leur ardoise et lèvent leur ardoise au signal (Procédé La Martinière).

On vérifie ensemble la réponse correcte et un élève explique pourquoi on trouve cette réponse.

J'écris ensuite le calcul en ligne qui correspond à ce que nous venons de voir.

Nous répétons cela pour d'autres chiffres.

2.4.2 Observation des élèves :

Les élèves n'ont pas tous compris ce qui était demandé au début.

Lorsque nous avons corrigé les premiers calculs, les élèves ont compris l'exercice.

Cependant, j'ai observé que certains élèves se contentaient de compter le nombre de boules non activées pour écrire leur résultat. Ainsi, ils ne faisaient pas réellement de lien entre le chiffre de départ et le chiffre à ajouter pour obtenir 10.

Pour régler ce problème, nous sommes passés à l'étape numéro 2 où je cachais les boules non activées. Ainsi, certains élèves devaient compter dans leur tête combien il fallait rajouter de boules à celles qui étaient activées pour obtenir 10. D'autres écrivaient rapidement leur réponse car ils connaissaient leurs compléments à 10 par cœur.

Cela a permis aux élèves de revoir ou de découvrir les compléments à 10 qui sont des connaissances très importantes pour simplifier la réalisation de calculs.

2.5.1 Activité sur les unités et les dizaines.

L'objectif de cette séance est de faire comprendre aux élèves la notion de dizaine et d'unité.

Le boulier permet de vraiment se rendre compte de ce qu'est le nombre 10 (10 billes soit 10 unités ou une ligne soit 1 dizaine).

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56) :
 - Unités de numération (unités simples, dizaines) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres).
 - Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).

Alors que nous avons travaillé sur une seule ligne lors des 4 séances précédentes, nous allons découvrir l'utilisation de plusieurs lignes du boulier d'école.

Nous débutons la séance par un rappel sur ce que nous avons déjà fait avec ce boulier.

Je demande aux élèves d'afficher sur le boulier certains chiffres demandés.

Ensuite je demande aux élèves de réfléchir sur la façon dont on pourrait afficher le nombre 12. Je demande ensuite aux élèves d'afficher d'autres nombres (toujours inférieurs à 20). Nous procédons également avec le Procédé La Martinière avec le boulier. Les élèves lèvent leur boulier pour montrer leur réponse.

Ensuite, je leur ai demandé d'afficher sur le boulier des groupements de 10 (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 et 100). Le but est de leur faire comprendre qu'une ligne est égale à une dizaine, deux lignes à deux dizaines ou une vingtaine, etc.

Lorsqu'on corrige, je note systématiquement au tableau les écritures en unités de numération de ce qui était demandé. Par exemple : 1 d = 10, 2 d = 20.

2.5.2 Observation des élèves :

Lorsque je leur ai demandé d'afficher 12, j'ai remarqué que beaucoup d'élèves procédait par dénombrement de 1 à 12. Ils comptaient toutes les billes pour arriver à 12. Il était donc important de leur faire comprendre que chaque ligne correspond à une dizaine.

Lorsque les élèves devaient placer les nombres tels que 10, 20, 30 sur leur boulier, certains continuaient à dénombrer une par une leurs boules. Mais ils ont vite assimilé ce que la séance visait à leur transmettre. C'est-à-dire activer directement une ligne entière pour chaque dizaine demandée car une ligne correspond à une dizaine.

2.6.1 Activité sur la décomposition additive des nombres inférieurs à 100.

L'objectif de cette séance est de comprendre la décomposition additive des nombres inférieurs à 100. Le boulier permet de se rendre compte rapidement de la décomposition d'un nombre en dizaines et en unités. En effet, le nombre de lignes activées correspond au chiffre des dizaines et le nombre de boules activées correspond au chiffre des unités.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Mémoriser des faits numériques et des procédures :

- Décompositions additives des nombres.

-Utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56) :

- Unités de numération (unités simples, dizaines) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) ;

- Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).

Dans cette séance, nous procédons toujours avec le PLM où chaque élève a un boulier.

Je demande aux élèves d'afficher sur leur boulier certains nombres compris entre 0 et 100.

Par exemple, je leur demande d'afficher 23 sur leur boulier. J'observe comment les élèves procèdent et je leur demande de lever leur boulier.

Nous mettons en commun et certains élèves expliquent leurs procédures.

J'écris au tableau les écritures en unités de numération du nombre demandé. Par exemple :

$$23 = 2 \text{ d} + 3 \text{ u.}$$

J'écris également la décomposition du nombre en question : $23 = 20 + 3$.

Je demande aux élèves d'indiquer sur leurs bouliers d'autres nombres et nous mettons toujours en commun.

2.6.2 Observation des élèves :

Dans cet exercice, encore quelques élèves dénombrent une par une les boules. La plupart des autres élèves ont compris que 23 c'était 2 dizaines et 3 unités donc ils activent 2 lignes et 3 boules sur leur boulier.

Cependant il est possible que certains élèves assimilent le premier chiffre (ici le 2) au nombre de lignes et le deuxième chiffre (ici le 3) au nombre de boules qu'ils doivent inscrire sur leur boulier sans se rendre compte des valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture.

2.7.1 Activité sur la recomposition additive des nombres inférieurs à 100.

L'objectif de cette séance est de comprendre la recomposition additive des nombres inférieurs à 100 afin de simplifier certains calculs pour les élèves tels que : $20 + 6 = \dots$

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Mémoriser des faits numériques et des procédures :

- Décompositions additives des nombres.

-Utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56) :

- Unités de numération (unités simples, dizaines) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) ;

- Valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).

Dans cette séance, le but est que les élèves s'éloignent de leur surcomptage habituel pour acquérir une procédure de calcul en passant par la recomposition additive.

Pour ce faire, les élèves doivent écrire sur leur ardoise le nombre que je vais indiquer sur mon boulier au tableau. J'active un certain nombre de lignes et un certain nombre de boules.

Prenons l'exemple du nombre 35. J'active 3 lignes et 5 boules et les élèves doivent écrire leur résultat sur leur ardoise et la lever au signal (PLM).

Nous mettons en commun et nous corrigeons. Certains élèves expliquent leur procédure.

J'écris au tableau les écritures en unités de numération des nombres demandés : 3 d + 5 u = 35. J'écris également la recomposition du nombre : $30 + 5 = 35$.

2.7.2 Observation des élèves :

Dans cette séance, certains élèves vont directement assimiler le nombre de lignes au nombre de dizaines. Ici, ils vont vite voir que le nombre est dans les trentaines. Mais beaucoup d'élèves continuent à surcompter à partir de 30 pour arriver à 35.

Le fait d'écrire au tableau la recomposition du nombre et l'écriture en unités de numération permet aux élèves de mieux s'éloigner du surcomptage.

2.8.1 Activité pour élaborer des stratégies de calcul.

Dans cette séance, l'objectif est de faire construire aux élèves des stratégies de calcul. Le but est que les élèves construisent eux-mêmes ces stratégies ou procédures pour qu'ils les retiennent et les utilisent lors de calculs relativement simples.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Élaborer ou choisir des stratégies, expliciter les procédures utilisées et comparer leur efficacité :

- Addition.

Dans cette séance, je demande aux élèves d'écrire sur leur ardoise le nombre que j'affiche sur le boulier et de lever leur ardoise au signal (PLM).

Pour commencer, je laisse le boulier en évidence devant eux et je les laisse trouver le nombre indiqué.

Je débute par des nombres simples à analyser tels que : 22, 31, 13, 41, 52, 63, etc.

Nous corrigeons ensemble en faisant expliciter aux élèves les procédures qu'ils ont utilisé.

Puis je passe à des nombres plus compliquer à analyser rapidement sur le boulier tels que : 19, 29, 37, 48, 59, etc.

Je demande aux élèves comment ils ont fait pour trouver le nombre indiquer.

Puis je refais la même chose mais en laissant le boulier devant eux 3 secondes puis en le cachant. J'observe les résultats des élèves et je questionne certains élèves sur les procédures ou stratégies utilisés.

Lorsque des élèves ont trouvé la procédure pour calculer plus rapidement, nous l'expliquons ensemble et je l'écris au tableau : $9 = 10 - 1$ ou $10 - 1 = 9$.

Ainsi nous voyons ensemble que pour ajouter 9 à un nombre, on ajoute 10 puis on retranche

1. Exemple : $12 + 9 = 12 + 10 - 1 = 22 - 1 = 21$.

Cela sera l'institutionnalisation de la séance.

Pour vérifier la bonne compréhension des élèves, nous effectuons un peu de calcul mental où je leur demande d'ajouter 9 à certains nombres. Par exemple : $26 + 9 = \dots$

Les élèves doivent utiliser ce que nous avons vu et ainsi écrire : $26 + 9 = 26 + 10 - 1 = 36 - 1 = 35$.

2.8.2 Observation des élèves :

Lors de la première étape, les élèves comptent le nombre de boules activées sur la ligne qui n'est pas totalement activé. Certains se trompent dans le dénombrement et compte deux fois une boule ou alors en oublient une. Certains parviennent à trouver le bon résultat en partant des dizaines (lignes activées) et en surcomptant les boules. Aucun élève n'a procédé à la manière dont je souhaitais.

Lors de la deuxième étape, beaucoup d'élèves ne parviennent plus à compter le nombre de boules en 3 secondes et donc ne trouve pas le résultat.

Seules quelques élèves parviennent, au bout de plusieurs essais, à trouver une stratégie pour trouver le nombre exact. Les élèves ont observé que, parfois, une seule boule n'était pas activée sur la ligne. Ils ont donc pensé à enlever une unité à la dizaine (la ligne complète) pour trouver le chiffre 9.

Après la mise en commun et l'institutionnalisation, beaucoup d'élèves ont compris ce que nous venions de voir et ont utilisé cette procédure pour résoudre les calculs demandés.

Cependant, certains élèves utilisent encore le surcomptage pour trouver le bon résultat.

2.9.1 Activité sur la commutativité de l'addition.

L'objectif de cette séance est de faire comprendre aux élèves la commutativité de l'addition, c'est-à-dire que l'on peut changer l'ordre des termes sans changer le résultat. Le fait de transmettre cette connaissance aux élèves peut leur permettre d'effectuer des calculs plus rapidement.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Élaborer ou choisir des stratégies, expliciter les procédures utilisées et comparer leur efficacité :

- Propriétés implicites des opérations : $2 + 9$, c'est pareil que $9 + 2$.

Pour cette séance j'écris au tableau différentes additions dont le résultat est inférieur à 10.

Je demande aux élèves d'utiliser leur boulier pour effectuer la première addition ($2 + 3$).

Nous mettons en commun et les élèves expliquent leur procédure.

Je montre ensuite aux élèves comment on procède à une addition sur le boulier d'école.

D'abord, on inscrit le premier terme de l'addition sur le boulier puis on ajoute le nombre de boules qui correspond au deuxième terme.

Les élèves doivent effectuer d'autres calculs en utilisant la procédure que je leur ai montré.

Nous corrigeons ensemble et j'inscris le résultat en face de chaque calcul.

En seconde étape, je propose les mêmes calculs mais avec les termes inversés ($2 + 4$ devient $4 + 2$) et les élèves doivent trouver leurs résultats en utilisant la même procédure.

Les élèves donnent leurs résultats et je les écris au tableau.

Je questionne ensuite les élèves sur ce qu'ils remarquent au tableau, je les aiguille si besoin (Y-a-t-il des résultats identiques ? Lesquelles ? Pourquoi à votre avis ?).

Le but est d'observer que même si on change l'ordre des termes d'une addition, le résultat sera toujours le même.

2.9.2 Observation des élèves :

J'ai observé beaucoup d'élèves qui effectuaient leur calcul ($2 + 3$) dans leur tête et qui indiquait directement le résultat sur leur boulier. Ils n'utilisaient pas le boulier comme procédé pour calculer mais juste comme support pour afficher le résultat.

Le fait de montrer aux élèves comment on procède pour effectuer une addition sur leur boulier a amené les élèves à reproduire cette procédure.

Les élèves activaient 2 boules puis 3 boules et dénombrant le nombre de boules activées pour trouver 5.

Lors de la seconde étape la plupart des élèves effectuait la même procédure, en activant 3 boules puis 2 boules et trouvaient 5.

Lors de la mise en commun, les élèves ont assez vite observé que certains calculs avaient le même résultat mais il a été plus difficile pour eux de comprendre que l'ordre des termes n'influait pas le résultat d'une addition.

2.10.1 Activité sur les additions

L'objectif de cette séance est de transmettre aux élèves une stratégie pour additionner des nombres : les compléments à la dizaine supérieure.

Le but est que les élèves décomposent certains nombres pour qu'ils servent de compléments à la dizaine supérieure de l'autre nombre.

Les compétences travaillées lors de cette séance sont :

- Mémoriser des faits numériques et des procédures :

- Compléments à la dizaine supérieure.

- Élaborer des stratégies :

- Addition.

Lors de cette séance, nous commençons par calculer des sommes de nombres inférieurs à 10.

Je demande aux élèves de calculer à l'aide de leur boulier les différents calculs que j'inscris au tableau (Par exemple : $8 + 6 = \dots$).

Je leur explique bien qu'ils doivent s'aider du boulier pour trouver le résultat et non pas calculer dans leur tête le résultat avant.

Les élèves montrent leur résultat et je leur demande comment ils ont procédé.

Ensuite les élèves effectuent d'autres calculs que nous corrigeons.

Je note au tableau les étapes que les élèves ont effectuées pour obtenir le résultat final.

L'explication de ces étapes servira d'institutionnalisation.

2.10.2 Observation des élèves :

Les élèves ont bien compris qu'ils devaient utiliser le boulier pour effectuer le calcul et non pas juste pour afficher leur résultat.

Les élèves activent 8 boules puis 6 boules et lisent le résultat sur le boulier.

Ils remarquent qu'une ligne et 4 boules sont activées donc ils reconnaissent le nombre 14.

Voici la discussion que nous avons eu lorsque certains élèves expliquaient leur procédure.

Le but était de leur faire comprendre la procédure qu'ils avaient fait sans s'en rendre compte.

P signifiant Professeur.

1 P – Qui veut nous donner son résultat et nous expliquer comment il a fait ?

Paul – ça fait 14.

P – Oui, mais dis-nous comment tu as fait ?

Paul – J'ai fait 8 et j'ai rajouté 6, ça fait une ligne et 4 boules donc ça fait 14.

5 P – Très bien, mais qui peut me dire pourquoi une ligne et 4 boules ça fait 14 ?

Aymen – Ben parce qu'une ligne c'est une dizaine et 4 boules c'est 4 unités donc ça fait 14.

P – Très bien ! Maintenant est-ce que quelqu'un a procédé différemment ?

10 P – Lorsque vous avez activé 8 boules et que vous deviez activer 6 autres boules, qu'avez-vous remarqué ? Était-il possible de rajouter 6 boules d'un coup ?

Lôqman – Non ! il fallait rajouter 2 boules sur la première ligne et 4 boules sur la deuxième ligne.

P – Très bien ! Pourquoi il fallait rajouter 2 boules puis 4 boules ? C'est quoi ce 2 et ce 4 ?

15 Kenza – C'est 6. $2 + 4$ ça fait 6.

P – Très bien, donc vous avez décomposer le 6 en $2 + 4$.

Le maître écrit au tableau $8 + 6 = 8 + 2 + 4$.

P – Qui peut me dire en quoi faire $8 + 2 + 4$ c'est plus simple que $8 + 6$?

Lôqman – Car on sait que $8 + 2$ ça fait 10 donc on rajoute 4 et ça fait 14.

20 P – Très bien ! Enfaite, ici, sans vous en rendre compte, vous avez décomposé le 6 en $2 + 4$ et cela vous a permis de faire une dizaine plus facilement en associant le 8 et le 2. Il ne vous restait plus qu'à ajouter 4 pour trouver 14.

Le maître complète au tableau $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$.

Cette discussion avait pour but de faire comprendre aux élèves cette stratégie de calcul qu'ils font sans s'en rendre compte sur le boulier mais qui peut leur être utile lors de calculs en ligne ou de calculs mentaux.

2.11 D'autres activités pour aller plus loin.

En utilisant ce boulier, il est également possible d'aborder d'autres notions mathématiques que nous n'avons pas fait.

Il est possible de travailler les tables de multiplication, par exemple, pour faire comprendre aux élèves le lien entre la multiplication et l'addition.

L'objectif serait donc de montrer que la multiplication est une répétition de l'addition.

En montrant que pour faire 5×3 sur le boulier, il suffit d'activer 5 boules, puis encore 5 boules et encore 5 boules. Cela permettrait aux élèves de se rendre compte que la multiplication c'est comme ajouter plusieurs fois ce même nombre.

L'utilisation de ce boulier pourrait également être utilisé en cycle 3 pour aborder les nombres décimaux.

En donnant la valeur 1 unité à l'entièreté du boulier, cela permettrait d'aborder les nombres décimaux jusqu'aux centièmes.

En effet, si le boulier entier vaut 1, chaque ligne vaut $1/10$ ou 0,10 et chaque boule vaut $1/100$ ou 0,01.

Le fait d'activer une ligne sur dix lignes met bien en évidence la fraction $1/10$ (un dixième).

Le fait d'activer une boule sur 100 boules met bien en évidence la fraction $1/100$ (un centième).

En passant par les fractions, il serait donc possible de faire comprendre aux élèves qu'une unité est séparée en 10 dixièmes (10 lignes) ou 100 centièmes (100 boules).

Le lien entre les fractions pourrait également être abordé.

Montrer aux élèves que 10 boules sur 100 d'activées ça correspond à $10/100$ (10 dixièmes) et que 1 ligne sur 10 correspond à $1/10$ (1 dixième) et que ces deux fractions sont égales.

Un travail sur les nombres plus grand pourra être effectué en utilisant le boulier différemment. Il faut attribuer la première ligne aux unités, la deuxième ligne aux dizaines, la troisième ligne aux centaines, etc.

Ce travail demande une bonne maîtrise des valeurs de position par les élèves.

Enfin, un travail sur les soustractions peut être facilement mis en place, de manière similaire au travail sur les additions.

IV Conclusion.

Ce mémoire de recherche avait pour objectif d'analyser en quoi les instruments en mathématiques pouvaient aider les élèves dans leurs apprentissages en cycle 2.

Afin d'y parvenir il était important de connaître l'histoire et les fonctionnements des différents instruments en mathématiques. Les recherches ont tout d'abord montré que l'utilisation des instruments en mathématiques pouvait favoriser la motivation des élèves et favoriser leurs apprentissages à condition qu'ils soient utilisés au service des apprentissages et non pas de manière non réfléchi. De plus, ces recherches ont montré que de nombreux instruments pouvaient être efficaces pour aborder différentes compétences de calcul et numération en cycle 2. Ces analyses ont montré que certains instruments étaient plus adaptés que d'autres dans certaines circonstances.

Les circonstances et les contraintes de mon expérimentation m'ont amené à m'intéresser à l'utilisation d'instruments mathématiques pour faire progresser mes élèves en calcul mental. Après avoir analysé les différents travaux effectués dans mes recherches, j'ai décidé de me tourner vers le boulier d'école pour expérimenter le questionnement de ce mémoire.

Cette expérimentation a montré que l'utilisation d'un instrument mathématiques, en particulier le boulier d'école, a permis aux élèves d'acquérir des nombreuses stratégies et procédures de calcul. Cet instrument a également fait travailler aux élèves des nombreuses compétences des programmes de cycle 2.

Nous pouvons donc affirmer que l'utilisation des instruments mathématiques a favorisé les apprentissages des élèves de cycle 2 par l'appropriation de procédures et stratégies de calculs.

Mon expérimentation n'a pas pu s'effectuer au sein d'une séquence de calcul et numération étant donné que je suis stagiaire et que mon complément s'occupe de ces notions mathématiques.

Un questionnement peu avoir lieu sur la mise en place d'une séquence en nombre et calcul avec comme seule utilisation des instruments mathématiques.

V Bibliographie

Riou-Azou Gwenaëlle, *Apport du boulier chinois en grande section de maternelle*, 2014.
<http://revue.sesamath.net/spip.php?article625>

Vendeira Céline, *Un boulier en classe : oui, mais lequel ?*.
<https://www.revue-mathematiques.ch/files/6414/9790/1400/RME227-Vendeira.pdf>

Educmaths, 2007.
<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/bouliers/utilisation-en-classe>

Eveilleau Thérèse, *Les bouliers et en particulier le boulier japonais*.
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/boulier.htm

Le boulier.
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Boulier>

Professeur Doizi, *Les différents types de bouliers*, 2016.
<https://professeurdoizi.wordpress.com/2016/01/17/les-differents-types-de-bouliers/>

Ecole élémentaire Louise Macault, Laon, *Le boulier au cycle 2 et cycle 3*, 2010.
<https://www.reseau-canope.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=885662>

Launay Mickaël, *Les bouliers – Machines à calculer*, 2017.
<https://www.youtube.com/watch?v=GnMgHsos7cY>

Bettinelli Bernard, *Un pour dix, dix pour un ! Numération des nombres entiers et décimaux aux cycles 2 et 3 sur l'abaque en couleur*.

Joël Briand, *Manipuler en mathématiques ... oui mais*.
<https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/manipuler-en-mathematiques-oui-mais/>

Michela Maschietto et Maria G. Bartolini Bussi, *Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*.

Ghislaine Gueudet et Laetitia Bueno-Ravel, *Perspectives didactiques sur le boulier : un questionnement renouvelé*, 2016.

<http://revue.sesamath.net/spip.php?article887>

Caroline Poisard, Isabelle Cochet et Dominique Tournes, *De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1*, 2016.

<http://revue.sesamath.net/spip.php?article889>

Laetitia Bueno-Ravel et Christine Harel, *le calcul mental à l'école : les apports du boulier chinois*, revue MathémaTICE, 2016.

<http://revue.sesamath.net/spip.php?article873>

<https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>

<https://eduscol.education.fr/1486/apprentissages-au-cp-et-au-ce1>

VI Annexes

1	10	100
2	20	2000
3	30	3000
4	40	4000
5	50	5000

6

6

0

6

0

0

7

7

0

7

0

0

8

8

0

8

0

0

9

9

0

9

0

0