



La modélisation et la représentation en mathématiques

Manon Denoyer

► To cite this version:

Manon Denoyer. La modélisation et la représentation en mathématiques. Education. 2019. hal-02313638

HAL Id: hal-02313638

<https://univ-fcomte.hal.science/hal-02313638>

Submitted on 11 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire

présenté pour l'obtention du Grade de

MASTER

« Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation »

Mention 2nd degré, Professeur des Lycées et Collèges, Professeur de Mathématiques

La modélisation et la représentation en mathématiques

présenté par
DENOYER Manon

Sous la direction de :
SIMARD Arnaud

Année universitaire 2018-2019

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier mon tuteur de stage, Monsieur Cédric LALEAUX qui a su rester disponible et être à mon écoute tout au long de cette année de stage. Je le remercie pour tous les conseils et échanges que nous avons pu avoir qui ont été d'une grande richesse et indispensables à ma formation de future enseignante.

Je remercie également tous mes collègues de mathématiques du Lycée Edouard BELIN pour leur disponibilité et leur bonne humeur. Ils ont contribué à rendre cette année conviviale.

Enfin, je remercie Monsieur Arnaud SIMARD, directeur de mémoire, pour l'aide qu'il m'a apporté pour l'élaboration de cet écrit ainsi que pour ses suggestions de lectures enrichissantes sur ce sujet. Je le remercie également pour les différentes relectures de cet écrit.

Sommaire

Remerciements	2
Introduction.....	4
I) Partie théorique	5
1) Qu'est-ce que la représentation en mathématique ?.....	5
2) Qu'est-ce que la modélisation en mathématique ?	6
3) Mathématiques et réalité : un aperçu historique	8
4) Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ?	9
a) Définition d'un modèle mathématique.....	9
5) La modélisation en classe de mathématiques	11
a) Pourquoi modéliser ?	11
b) Comment faire vivre en classe la modélisation.....	12
c) Les obstacles et les avantages des tâches de modélisation.....	15
II) Partie expérimentation	17
1) L'importance du numérique pour le développement des compétences modéliser et représenter.....	17
2) Une activité mettant en œuvre les compétences représenter et modéliser avec ma classe de seconde	18
a) Analyse a priori.....	18
b) Analyse des procédures de résolution et analyse a posteriori	22
3) Un problème à prise d'initiative en classe de première économique et sociale	24
a) Présentation de la classe	24
b) Analyse a priori.....	24
c) Comment ai-je développé grâce à cette activité la compétence « modéliser » chez les élèves ?	29
4) Bilan de ces deux activités.....	31
a) Du point de vue de l'enseignant	31
b) Du point de vue de l'élève.....	32
c) Du point de vue des mathématiques mises en jeu	32
Conclusion	34
Bibliographie	35
Résumé.....	36

Introduction

Je suis actuellement professeur stagiaire au lycée Edouard Belin de Vesoul (Haute-Saône). J'ai en charge une classe de seconde et une classe de première économique et sociale. La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs :

- L'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures.
- Le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur...) et de compétences spécifiques aux mathématiques.

En effet, depuis la réforme des collèges en septembre 2016, six compétences sont à développer chez les élèves dès le cycle 3 et jusqu'au lycée telles que : chercher, représenter, calculer, communiquer, raisonner et modéliser.

Dans mes classes, j'essaie de mettre en avant ces compétences indispensables à la résolution de problèmes mathématiques.

Dans le cadre de mon mémoire, j'aimerais étudier plus spécifiquement les compétences « modéliser » et « représenter ». En effet, j'aimerais travailler sur le lien entre les mathématiques et la réalité et le mettre en évidence avec mes élèves.

Les mathématiques sont très souvent considérées comme des sciences abstraites où l'on ne peut pas toucher ni manipuler les objets que l'on utilise. Les élèves et une majeure partie de la société, pensent que les mathématiques qui sont apprises à partir du collège sont inutiles dans la vie courante et qu'elles vont servir à une minorité de personnes dans leur métier ou dans leur vie.

Le plus important pour moi en devenant professeur est que les élèves puissent mettre un sens derrière toutes les notions mathématiques, et qu'ils apprennent à traduire un problème réel en langage mathématique. Ainsi la modélisation et la représentation contribuent à façonner auprès de l'élève une image positive et utile de celles-ci. C'est pourquoi j'aimerais répondre à la problématique suivante dans le cadre de mon mémoire de ma deuxième année de master : En quoi la modélisation et la représentation permettent-elles aux élèves de mieux comprendre les notions mathématiques ?

I) Partie théorique

1) Qu'est-ce que la représentation en mathématique ?

Cette compétence, d'après les programmes officiels viserait à : « Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique. Passer d'un mode de représentation à un autre. Changer de registre. » Par exemple, représenter une fonction par une courbe ou une situation de proportionnalité par un tableau.

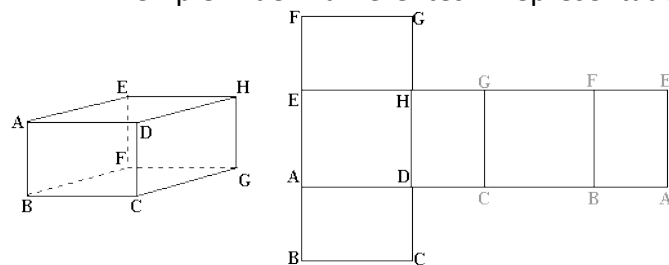
« « Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit » d'après le dictionnaire Larousse. Après quelques recherches sur le site Eduscol : « Cette définition relativement simple cache cependant des réalités bien distinctes. Un premier niveau de représentation commun entre autres aux mathématiques, à la géographie, aux sciences et aux arts est « Représenter » des objets, des visages (ce que font les enfants lorsqu'ils dessinent) ou en tout cas des formes ou des solides. Mais on peut aussi « Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité, c'est un deuxième niveau de représentation. Et il arrive enfin qu'on doive « représenter » des objets abstraits, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques, qui est un troisième niveau de représentation et qui est le moins intuitifs pour les élèves.

Le développement de la compétence « Représenter » à partir du cycle 4 doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans la vision du réel et dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Comprendre ce qu'est un triangle, ce qu'est une fonction, ce qu'est une fraction, c'est savoir « représenter » ces objets, c'est-à-dire trouver un registre de représentation adéquat, mais aussi savoir varier les représentations et les registres de représentation. Par exemple un élève capable de comprendre un exercice mettant en jeu une fonction, un graphique, un tableau de nombres, une expression algébrique, est en train de s'approprier la notion de fonction.

Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors permettre aux élèves de mieux appréhender les outils mathématiques. »

D'après Cabassut représenter un objet serait de « présenter un objet (concret ou abstrait), ou des relations entre les objets d'un certain point de vue ».

Exemple de différentes représentations d'un parallélépipède rectangle :



Perspective cavalière

Patron

Désignation

2) Qu'est-ce que la modélisation en mathématique ?

Le verbe « modéliser » signifie « *Procéder à une modélisation.* » c'est-à-dire « *Établissement de modèles, notamment des modèles utilisés en automatique, en informatique, en recherche opérationnelle et en économie.* »

D'après les programmes officiels la compétence « modéliser » viserait à « *Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques ...). Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Valider ou invalider un modèle.* »

La compétence « Modéliser », si on la prend dans son acceptation la plus large, renvoie pour le mathématicien au fait d'utiliser un ensemble de concepts, de méthodes, de théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques.

J'ai effectué des recherches sur le site *Eduscol* sur la compétence « modéliser » qui m'ont guidé sur un article de Jean-Claude Duperret s'intitulant : « De la modélisation du monde au monde des modèles ». C'est un article de revue n°486 paru dans « Le Bulletin vert » du site de l'APMEP dans la rubrique « Pour chercher et approfondir » comportant deux sous-articles : « Le délicat rapport « mathématiques-réalité » » de 21 pages et un autre « Des statistiques aux probabilités » de 13 pages, publiés en 2012. Ces deux articles reprennent en grande partie deux conférences qu'il a faites lors de deux colloques : « Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ? » organisé par la COPIRELEM en juin 2007 à Troyes et « Les dés sont-ils à jeter ? » organisé par les commissions, Inter-IREM Collège Second cycle, Statistique et Probabilités en juin 2008 à Périgueux.

Jean-Claude Duperret est professeur de mathématiques. Il a enseigné pendant de nombreuses années dans un collège classé « ZEP » de l'agglomération troyenne. Il s'est très vite impliqué dans l'IREM de Reims, que ce soit au niveau de groupes de recherche ou dans l'animation de stages. Il a mis en place avec toute l'équipe de son collège une expérimentation des « nouveaux programmes » de 1986, et s'est beaucoup investi dans les « suivis scientifiques » en tant que responsable de la commission Inter IREM 1^{er} cycle. Il a participé aux travaux de nombreuses commissions, et est membre de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) depuis sa création. Il est l'un des moteurs de la formation continue dans l'académie de Reims, et a été formateur à l'IUFM depuis sa création. Il est maintenant responsable du centre IUFM de Troyes.

Ici l'auteur « revisite » un certain nombre de « mondes mathématiques » de l'enseignement en faisant le lien entre la réalité et la modélisation.

Il se pose différentes questions telles que : « *Si la plupart des autres disciplines scientifiques ont pour objet de « décrire » et de « modéliser » un point de vue du « monde réel », point de vue différent suivant ces disciplines, comment les mathématiques peuvent-elles s'inscrire dans ce rapport au monde réel ? Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? Y a-t-il unicité du modèle pour*

traduire une « réalité », ou celui-ci n'est-il pas lié à « l'intention » de modélisation ? En quoi la connaissance du modèle permet-elle « d'éclairer » la réalité, voire de l'expliquer et d'avoir une attitude « opérationnelle » et « décisionnelle » ? Page 1»

Dans cet article l'auteur nous livre sa définition de la modélisation ainsi que le parallèle entre la construction des mathématiques dans l'enseignement et l'histoire. Il veut montrer que la construction de modèles de plus en plus complexes et évolués éloigne de la réalité. Il s'appuie sur de nombreux exemples liés à son expérience d'enseignant et de formateur pour éclairer les notions de « modélisation » et de « modèles mathématiques ».

A l'époque des « mathématiques modernes » il n'y avait aucun lien entre mathématiques et réalité. Elles étaient une structure de construction interne sans rapport avec la réalité. A cette époque on ne laissait pas les élèves en réelle activité mathématiques et cela déplaisait fortement à l'auteur.

C'est en 1986 lors de l'arrivée des « nouveaux programmes » que l'on commença à parler d'activité à travers des problèmes concrets et issus de la vie quotidienne.

Pour l'auteur, la modélisation est un moyen pour faire le lien entre réalité et mathématiques : *« Pour ma part, dans le cadre d'un enseignement des mathématiques pour tous, j'utiliserai cette notion de modélisation comme un processus de « re-présentation » de situations d'une certaine « réalité » dans un modèle mathématique, « re-présenter » étant pris au sens de présenter cette situation avec une nouvelle description liée au modèle choisi. Page 4».*

Ici, il évoque une première modélisation du monde qui est la géométrie, avec différents modèles : géométrie euclidienne, géométrie sphérique, géométrie non euclidienne ainsi que les groupes de transformation. Il va aussi illustrer par des exemples l'importance du modèle choisi. Il fait également le lien entre la géométrie « naturelle » qui est la géométrie des objets et des actions physique et la géométrie « axiomatique naturelle » qui est la géométrie des objets « idéalisés » et des actions intellectuelles. Ensuite il développera une autre représentation du monde avec les nombres. D'après Jean-Claude Duperret *« Ce monde des « nombres » naît du monde des « grandeurs » via la « mesure ».* Page 9 ». Il s'appuie sur des exemples concrets pour expliquer comment l'homme modélisa le monde avec les nombres et notamment l'idée du groupement puis l'intervention du calcul. L'auteur suscite le modèle arithmétique ainsi que celui algébrique, notamment avec l'intervention du calcul et de la syntaxe algébrique présents dès le cycle 4.

Pour conclure *« S'il fallait garder une idée forte de ce premier article, c'est que les mathématiques sont au regard de l'histoire un formidable outil intellectuel pour penser le monde, qu'a créé l'homme, qu'il a enrichi au fil des siècles et des civilisations ! Et si nous pouvions persuader nos élèves de cela, peut-être notre enseignement produirait-il moins « écorchés vifs des mathématiques » ! »* J'ai souvent entendu cette question : « A quoi servent les mathématiques ? ». Cet article est une belle réponse et une illustration de ce que devrait être l'enseignement de cette discipline, c'est-à-dire la mise en avant du rapport mathématiques et réalité comme dans d'autres sciences. Le plus important pour moi dans mon futur métier sera que les élèves puissent mettre un sens derrière toutes les notions de mathématiques, et qu'ils apprennent à traduire un problème réel en langage mathématiques. Ainsi la modélisation contribue à façonner auprès de l'élève une image positive et utile de celles-ci. C'est pourquoi j'aimerais répondre à cette problématique dans le cadre de mon mémoire de ma deuxième année de master.

« La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. Définir

précisément cet extérieur n'est pas chose aisée, car il n'est pas certain qu'on puisse simplement l'envisager ou le nommer sans disposer déjà d'un minimum de concepts, de théories, de modèles déjà plus ou moins liés aux mathématiques. Ceci étant, quel que soit le terme utilisé (monde naturel, monde empirique, réalité extérieure, monde réel, référence, contexte), la modélisation fait intervenir un élément non mathématique au début et à la fin du processus. On peut en effet décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel.

Entretenir la compétence « Modéliser », c'est aussi entretenir la confiance que les élèves ont dans l'enseignement qui leur est proposé : découvrir qu'un modèle géométrique permet de donner une bonne approximation du rayon de la Terre fait partie de ces expériences qui contribuent à façonner auprès de l'élève de collège par exemple une image positive et utile des mathématiques. »

3) Mathématiques et réalité : un aperçu historique

Depuis plusieurs siècles, les mathématiques sont non seulement un outil extrêmement important pour agir sur la nature et la modifier, un des piliers principaux de la technique et de la technologie, mais aussi (et peut être surtout) un instrument majeur pour la comprendre. En ce sens, elles sont non seulement source d'utilité mais aussi de « vérité ».

A partir du XVII^{ème} siècle, nos représentations du monde sont de plus en plus souvent des images mathématiques, dans les processus de description et d'analyse du monde comme dans les techniques d'intervention active sur lui, est ce qui est appelé la « mathématisation » de la réalité. Dans une perspective très générale, la vision mathématique du monde (et le processus de « mathématisation » correspondant) ne commence pas avec la révolution scientifique du XVII^{ème} siècle. Il est vrai que l'idée selon laquelle le monde ne peut être compris que si l'on connaît la langue dans laquelle il a été écrit, à savoir les mathématiques, fut énoncée pour la première fois d'une façon claire et explicite par Galilée : *« La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur. »*

Mais cette idée n'était pas complètement nouvelle : elle plonge ses racines dans une longue tradition pythagoricienne, néopythagoricienne et platonicienne, qui trouve son expression la plus claire dans la pensée de la Renaissance. Suivant cette idée, les structures du monde sont représentées et déterminées par des nombres et par un réseau compliqué et mystérieux d'harmonies et d'associations.

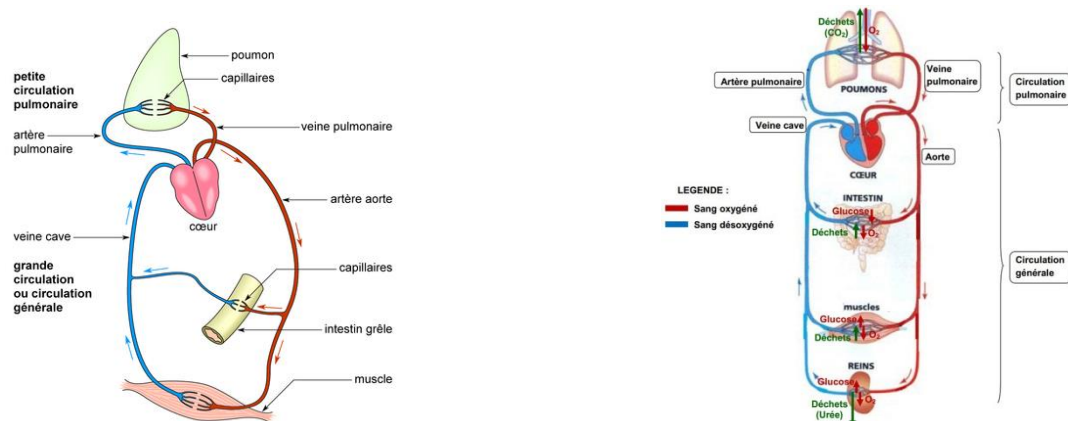
4) Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ?

a) Définition d'un modèle mathématique

D'après le dictionnaire de la langue française le Littré, nous apprenons qu'un modèle au sens figuré du terme, « *est pour les choses d'esprit l'équivalent des modèles dans les arts* ». Nous sommes alors ramenés à une notion plus familière. En effet, chacun sait que dans les arts, un modèle est une représentation d'un objet existant ou à réaliser. Nous pouvons alors dire qu'un modèle mathématique est une représentation en langage mathématique d'un aspect de la réalité, que cet aspect existe déjà ou qu'il s'agisse de le réaliser.

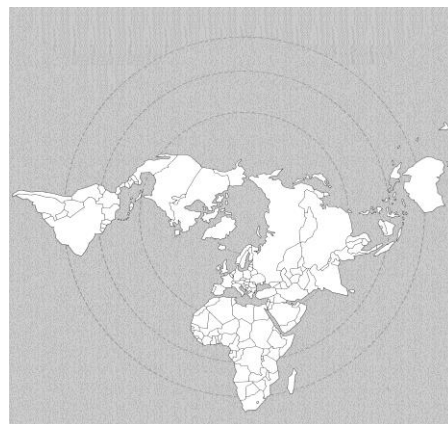
Nous avons différents types de modèles (pas forcément mathématiques !). En voici quelques exemples :

- 1) en science et vie de la terre nous avons différents modèles de la circulation sanguine :



Ces modèles diffèrent par leur complexité. Ils ont tous deux une fonction explicative.

- 2) Dans le cas des modèles planisphères de la Terre, les mathématiques sont présentes implicitement dans la construction des planisphères et dans leurs lectures. On retrouve que chaque modèle apporte un point de vue différent : l'un est centré sur l'Europe alors que l'autre est centré sur un pôle. Ici ces deux modèles remplissent une fonction descriptive.

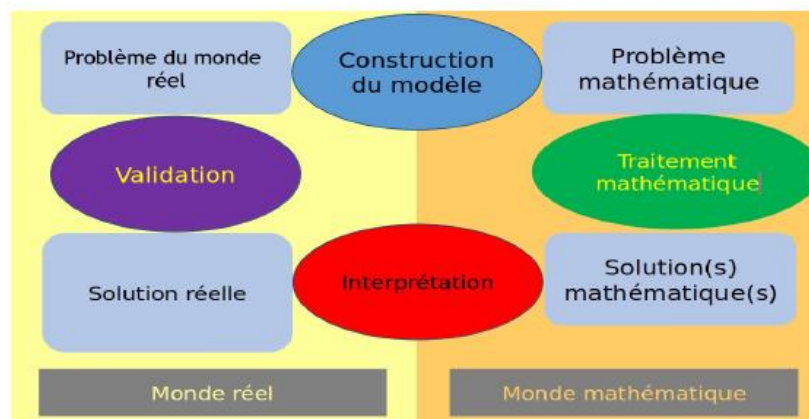


Le modèle que l'on va choisir va alors simplifier ce que l'on veut modéliser et parfois introduire des différences de points de vue.

- 3) Le dernier exemple est inspiré de l'atelier du groupe lycée professionnel de l'IREM de Strasbourg (Stenger & al. 2016) qui a mis en œuvre en classe la situation de modélisation suivante : La réserve spéciale de participation est un dispositif légal obligatoire dans les entreprises d'au moins 50 salariés, facultative dans les autres, permettant la redistribution au profit des salariés d'une partie des bénéfices qu'ils ont contribué, par leur travail, à réaliser dans leur entreprise. Les sommes versées dans cette réserve sont ensuite réparties entre les salariés de l'entreprise, selon un accord conclu au sein de celle-ci sur la base des critères légaux de répartition. Trois modèles de répartition sont proposés aux élèves : répartition uniforme entre chaque salarié, ou bien répartition en proportion des salaires, ou bien répartition en combinant les 2 critères précédents. Ici les modèles proposés sont explicitement mathématiques. On remarque que les deux premiers modèles, répartition uniforme ou répartition proportionnelle sont relativement fermés car il n'y a pas de choix dans les caractéristiques du modèle. Le dernier modèle, combinant les deux précédents, est plus ouvert car on ne précise pas la combinaison entre les deux premiers modèles. On peut par exemple fixer librement un pourcentage de la somme à répartir suivant le premier modèle, le reste étant réparti suivant le second. Ces modèles permettent alors d'aider à prendre une décision.

Après avoir examiné différentes définitions proposées dans la littérature (Dictionnaire de l'académie Française, Larousse, Brousseau 2004, Evrard & al. 2015) et dans les textes officiels sur les programmes de 2016 (BOEN 2015 ; Ministère 2016, Richard Cabassut considère que modéliser un problème c'est « *représenter ce problème pour essayer de le résoudre* ». Si ce problème est extra-mathématique et est représenté par un problème mathématique, il s'agira d'une modélisation mathématique, ou plus précisément d'une mathématisation. Par exemple : Quelle puissance de radiateurs faut-il pour chauffer la salle de classe ?

Parmi les différents cycles de la modélisation (Blum & Leiss 2006), nous retiendrons celui proposée par le projet LEMA (2009) et inspiré de PISA (2006) avec le cycle de modélisation suivant expliquant comment peut-on modéliser un problème :



Cycle de modélisation du projet LEMA

Pour parvenir à une modélisation : on part d'un problème réel et on va construire un modèle pour le transformer en problème mathématiques. Nous appelons tout d'abord la modélisation horizontale (Delangue 1987) le fait de passer du monde réel au monde mathématique puis la modélisation verticale le fait de résoudre un problème mathématiques dans le monde mathématique (exemple : j'ai un problème géométrique que je vais modéliser par un problème algébrique). Une fois que j'ai résolu le problème, il faut que je l'interprète de nouveau en solution réelle ce qu'appelle Richard Cabassut « *démathématiser* ». En effet, lorsque j'ai la solution réelle, il faut que j'essaie de valider de nouveau pour voir si le résultat est bien en accord avec la réalité.

Pour construire le modèle que je vais utiliser, les élèves devront être confrontés à la rencontre avec des modèles de référence qui vont permettre d'être reconnus dans des situations et utilisés. Dans certains cas, il faudra construire un modèle neuf et unique qui sera propre à la résolution d'un problème et qu'on utilisera qu'une seule fois.

5) La modélisation en classe de mathématiques

a) Pourquoi modéliser ?

D'après Richard Cabassut, modéliser serait formatif. En effet, la modélisation permet de développer toutes les compétences mathématiques au programme.

Elle permet également de développer l'esprit critique. En effet, dans le socle commun, nous pouvons lire : « *L'élève vérifie la validité d'une information et distingue ce qui est objectif de ce qui est subjectif. Il apprend à justifier ses choix et à confronter ses propres jugements avec ceux des autres. Il sait remettre en cause ses jugements initiaux après un débat argumenté, il distingue son intérêt particulier de l'intérêt général* ». Nous pouvons alors dire que le travail en groupe est propice à la résolution de problème via la modélisation. En effet, les élèves pourraient comparer leur modèle, leurs hypothèses et argumenter sur leur choix. Cela peut amener à des débats dans la classe qui ne sont pas directement reliés aux mathématiques et ainsi peuvent développer des connaissances de culture général. De plus, l'élève doit aussi, lorsqu'il a trouvé la réponse dans le « monde mathématiques », l'interpréter, la justifier et vérifier que cette réponse peut correspondre à la réalité et dans ce cas, l'esprit critique est largement développé. Il est en effet très important pour la formation mathématique que l'élève soit confronté à des connaissances, des arguments, des situations extra-mathématiques et qu'il sache les différencier. Comme cela, il apprendra les avantages, l'intérêt ou les faiblesses de procédures et d'arguments mathématiques.

La modélisation permet de rendre les mathématiques utilitaires : utiles pour les autres disciplines, utiles dans la vie quotidienne (exemple : distance entre deux voitures sur autoroute), utile pour la formation du citoyen (compétence critique vu plus haut), utile pour la formation de l'individu (raisonnement déductif, argumentation, abstraction, ...) importantes pour comprendre et analyser des situations complexes.

Elle permet de contribuer à l'image des mathématiques. En effet, des études de sociologues ont montrées qu'il y a un lien entre l'image de cette matière et les difficultés de certains élèves. Modifier l'image permet de favoriser l'apprentissage, la relation avec les mathématiques et peut être l'orientation future de ces élèves. D'autant plus que cette orientation se fera maintenant en classe de seconde générale. Rendre les mathématiques

plus populaires, plus attirantes en proposant des thèmes plus en lien avec la vie quotidienne, les autres disciplines, être dans des univers plus familiers permettra de faciliter le rapport avec la situation. En effet, lorsque l'on ne connaît pas on a d'abord des difficultés pour s'approprier le contexte donc cela permet aux élèves de s'engager plus facilement dans le problème.

b) Comment faire vivre en classe la modélisation

Tout d'abord en tant que professeur stagiaire, je voulais m'intéresser à la question suivante : comment concevoir des tâches de modélisation à faire vivre en classe ?

Il faut tout d'abord s'intéresser aux qualités de la tâche :

- Lien avec le monde réel et authenticité : par exemple chauffer une salle, et chauffer la salle de classe, les élèves se sentiront encore plus concernés et cela permettra une manipulation plus simple pour prendre les mesures.
 - Intérêt de la situation parfois incompris par l'élève.
 - Pertinente pour les élèves : plus la tâche est pertinente pour les élèves, plus ils vont être motivés.
- Lien avec le monde mathématique (modèles attendus disponibles ou mobilisables chez l'élève, lien avec les programmes, ...)
- Degré d'ouverture de la tâche pouvant se faire sur plusieurs niveaux :
 - Au niveau de la question : on pourrait proposer des situations sans questions et demander aux élèves, qu'est-ce qui vous paraît problématique dans cette situation ce qui peut introduire des problématiques très ouvertes que le professeur n'a pas forcément prévues donc plus difficiles à gérer. La question peut être plus ou moins précise : par exemple : comment va-t-on chauffer cette salle de classe ? Ou on peut préciser la question comme : Comment va-t-on chauffer cette salle de classe sachant que il y a x mètres carrés de baies vitrées, qu'elle est exposée au sud,... ?
 - Au niveau des hypothèses : soit on ferme complètement ou on laisse les élèves faire leurs propres hypothèses.
 - Au niveau des modèles disponibles : on peut choisir, soit, de répartir uniformément la prime et ainsi imposer le modèle mathématique, soit, choisir de répartir proportionnellement la prime par rapport aux salaires (on impose ici la procédure mathématiques).

Toutes ces qualités de la tâche vont dépendre de ce que l'on vise comme objectifs d'apprentissages. Est-ce que je veux introduire un problème ouvert pour parcourir tout le cycle de modélisation ou est-ce que je veux seulement introduire un nouveau modèle ou encore est-ce que je veux vérifier la connaissance d'un modèle que l'on a déjà travaillé ? Est-ce que je veux vérifier l'application de procédures pour résoudre des problèmes, etc.

Je vais maintenant relater un exemple de tâche utilisant la modélisation que Richard Cabassut présenta lors d'une conférence à Rouen d'après une idée de Mr Kratz (IREM de Strasbourg). La problématique était la suivante :

Réserve de participation :

La réserve spéciale de participation est un dispositif légal (<https://www.servicepublic.fr/particuliers/vosdroits/F2141>) obligatoire dans les entreprises d'au moins 50 salariés, facultative dans les autres, permettant la redistribution au profit des salariés d'une partie des bénéfices qu'ils ont contribué, par leur travail, à réaliser dans leur entreprise. Les sommes versées dans cette réserve sont ensuite réparties entre les salariés de l'entreprise, selon un accord conclu au sein de l'entreprise sur la base des critères légaux de répartition.

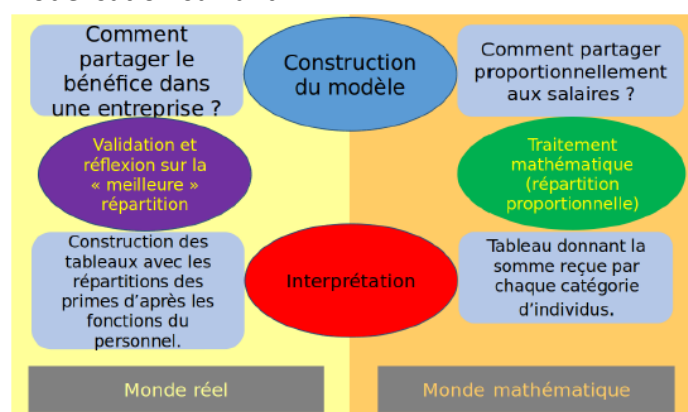
Ce problème fut proposé à une classe de seconde professionnelle dans le secteur tertiaire.

On peut soit proposer un problème très ouvert comme celui-ci et c'est aux élèves d'aller sur internet par exemple pour trouver les informations dont ils ont besoin, voir s'il y a des modèles qui sont imposés, s'ils n'en trouvent pas, c'est à eux de les proposer. Ils peuvent aller sur le site du ministère et découvrir les quatre modèles imposés par la loi.

On peut également avoir un problème plus fermé, par exemple en donnant la formule permettant de calculer cette réserve spéciale que l'on trouve sur le site du Ministère et vouloir travailler la compétence algébrique par exemple et proposer des modèles que les élèves devront choisir.

Ce fut proposé à une classe de seconde professionnelle dans le secteur tertiaire.

Le groupe IREM « Lycée professionnel » de Strasbourg propose comme modèle mathématique une répartition proportionnelle au salaire. On obtient alors le cycle de modélisation suivant :



Cycle de modélisation pour la répartition de la prime de participation

Voici l'analyse de cette séance de modélisation. Dans cette grille d'analyse ils distinguent bien ce qui relève du monde mathématique (que le professeur de mathématique a en principe l'habitude de gérer) et ce qui relève du monde extra-mathématique (qui peut amener le professeur à être confronté à des connaissances ou à des procédures extra-mathématiques qu'il n'a pas l'habitude de gérer).

Critères d'analyse	Réserve spéciale de participation
Quel(s) exemple(s) de modèle peut être utilisé ?	Répartition uniforme entre les salariés (option 1) Répartition proportionnelle aux salaires (option 2) Répartition combinant les deux critères (option 3)
Quelles sont les données mathématiques ? Autres ?	Le tableau des salaires annuels de l'entreprise. Les différentes fonctions (assistant, technicien ...) dans l'entreprise.
Quelle(s) hypothèses mathématiques ou autres peuvent être formulée(s) ?	Pour les options 1 et 2, aucune hypothèse n'est nécessaire. Pour l'option 3, il faut préciser comment combiner les options 1 et 2.
Quelles compétences	Pour l'option 1, concept de répartition uniforme et procédure de
mathématiques sont attendues ?	calcul de la part. Pour l'option 2 : en seconde professionnelle : - résoudre un problème dans une situation de proportionnalité clairement identifiée (programme LP p.7) - comprendre l'intérêt d'une écriture littérale [...] en employant des formules (programme cycle 4 p.372) - interpréter, représenter et traiter des données (cycle 4 p.373) - exploiter des données (programme LP p.4).
Quelles compétences autres sont attendues ?	Connaissance du vocabulaire de l'entreprise (prime de répartition, fonctions dans l'entreprise). Comprendre les enjeux et le fonctionnement d'une entreprise. (Réalité de la répartition des revenus, organigramme d'une entreprise).
Quelles difficultés mathématiques pour l'élève sont attendues ?	Compréhension de la notion de répartition uniforme. Compréhension de la notion de proportionnalité. Complexité de la formule de répartition. Difficultés de travailler avec des coefficients de proportionnalité petits ou grands. Ordre de grandeur des nombres.
Quelles difficultés autres pour l'élève sont attendues ?	Difficultés de compréhension de l'énoncé : les données sont très nombreuses. Situation complexe : les élèves ne savent pas quelle procédure choisir.
Quelles difficultés pour l'enseignant sont possibles, en lien avec les mathématiques et avec autres ?	Gestion d'un éventuel rappel sur la proportionnalité. Gestion d'un problème ouvert. Gestion du temps.

Comment évaluer les compétences des élèves ?	S'approprier : L'élève sait trouver des informations pertinentes pour calculer le montant de la réserve de participation. Pour l'option 2, l'élève sait utiliser les salaires pour répartir proportionnellement aux salaires le montant de la prime. Analyser – Raisonner : indicateurs L'élève reconnaît une situation de proportionnalité entre les salaires et les primes. L'élève conçoit l'utilisation d'une formule à copier dans le tableur pour calculer chaque prime. Réaliser : L'élève calcule le montant de la prime totale. L'élève calcule pour chaque salaire la prime associée en utilisant éventuellement le tableur. Valider : L'élève valide ses calculs précédents (en les justifiant par les règles de calcul algébrique, par la règle de trois, ou par les propriétés de copier-coller) Communiquer : L'élève rend compte de sa démarche oralement et/ou par écrit.
--	---

Je terminerai cette partie évoquant les démarches d'investigation qui sont des parties intégrantes de la modélisation. Il s'agit, selon les textes internationaux, de relever le défi d'un renouvellement des démarches d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies en cherchant à rendre l'apprentissage plus actif et plus motivant. Il s'agit, selon ces textes internationaux, de relever le défi d'un renouvellement des démarches d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies en cherchant à rendre l'apprentissage plus actif, plus motivant. Il s'agit toujours, dans une démarche d'investigation, de conduire les élèves vers les savoirs visés, qui restent à étudier, mais à travers une activité qui tendrait à les faire se comporter d'une certaine manière comme des scientifiques.

c) Les obstacles et les avantages des tâches de modélisation

Une étude a été faite sur 235 enseignants (la moitié d'enseignants français et l'autre moitié d'enseignants espagnols) ayant répondu à un questionnaire sur les obstacles et les avantages des tâches nécessitant une modélisation.

Les difficultés dominantes sont :

- L'estimation de la durée pour résoudre une tâche de modélisation.
- Le manque de temps pour préparer une tâche de modélisation pour l'enseignant.
- Le manque de temps en classe.
- La plupart des élèves ne savent pas quoi faire face à une tâche de modélisation.
- Ces tâches requièrent beaucoup de ressources supplémentaires.

Les points positifs de la modélisation :

- Ce type de tâches favorisent l'apprentissage de tous les élèves (ceux ayant des plus ou moins bons résultats).

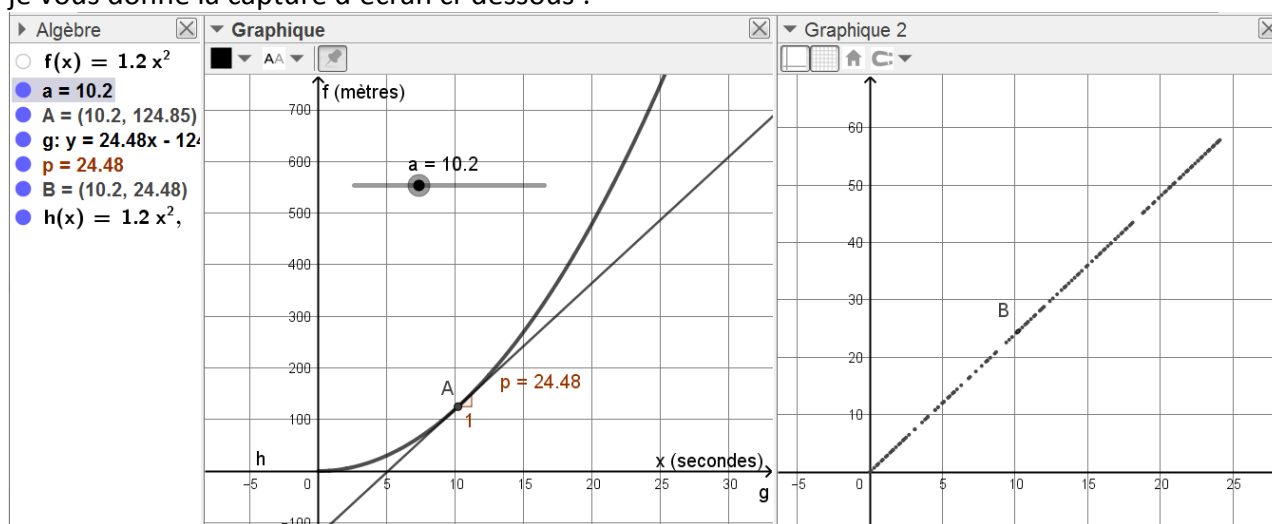
- On peut utiliser les erreurs des élèves pour faciliter leur apprentissage de la modélisation.
- Soutenir les élèves dans le développement de leur esprit critique.
- Ce type de tâche met en avant l'autonomie des élèves.
- Les élèves acquièrent beaucoup de connaissances sur l'utilisation des mathématiques dans les tâches de modélisation.
- Les élèves remarquent qu'il n'y a souvent pas seulement une réponse correcte.

II) Partie expérimentation

1) L'importance du numérique pour le développement des compétences modéliser et représenter

Le numérique prend une part importante dans l'apprentissage des élèves en mathématiques. En effet, nous pouvons lire dans le programme officiel de seconde : « L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement le dialogue entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement. »

En ce qui concerne la compétence « représenter », les logiciels de géométrie dynamique permettent de rendre certains objets mathématiques plus perceptibles par les élèves. Par exemple, j'ai utilisé Géogébra pour introduire la notion de fonction dérivée dont je vous donne la capture d'écran ci-dessous :



Le but était que les élèves fassent le lien entre le coefficient directeur de la tangente de la fenêtre graphique 1 et l'ensemble des points de la fenêtre graphique 2 représentant la fonction dérivée. Ainsi, ils pouvaient appréhender plus facilement la définition d'une fonction dérivée.

Ce type de logiciel permet également d'émettre des conjectures et de mieux appréhender les problèmes.

En ce qui concerne la compétence « modéliser », les logiciels tels que le tableur permettent de faire une simulation, valider ou invalider un modèle.

Un exemple en classe de seconde sur le choix d'un modèle en utilisant l'observation statistique des fréquences :

Lors du lancer de deux dés cubiques bien équilibrés, numérotés chacun de 1 à 6, on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus sur chaque face du haut. Dans l'exemple ci-dessous, le résultat est 7.



Sur quelle somme pariez-vous ?

Une partie de la classe a simulé sur tableur la somme de deux dés avec la fonction =ALEA.ENTRE.BORNES puis observé la fréquence d'apparition de chaque somme.

Voici la feuille de tableur :

A2		fx		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)			
	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Somme	Fréquence d'apparition S=2	Fréquence d'apparition S=3	Fréquence d'apparition S=4	Fréquence d'apparition S=5
2	6	5	11	0,0268	0,0584	0,0817	0,1104
3	2	1	3				
4	2	1	3	Fréquence d'apparition S=6	Fréquence d'apparition S=7	Fréquence d'apparition S=8	Fréquence d'apparition S=9
5	2	4	6	0,1417	0,1614	0,1392	0,1154
6	1	6	7				
7	2	5	7	Fréquence d'apparition S=10	Fréquence d'apparition S=11	Fréquence d'apparition S=12	
8	1	6	7	0,0819	0,0559	0,0272	
9	3	4	7				
10	5	3	8				
11	5	4	9				
12	1	4	5				

Ils ont alors pu choisir le modèle suivant :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	0,027	0,056	0,081	0,111	0,14	0,17	0,14	0,111	0,081	0,056	0,027

On a insisté sur le fait qu'il y ait peu de chances que le modèle colle exactement à la réalité.

Cela ne reste qu'une « modélisation ».

2) Une activité mettant en œuvre les compétences représenter et modéliser avec ma classe de seconde

a) Analyse a priori

La séance durant laquelle j'ai proposé cette activité s'inscrit dans la séquence sur l'étude qualitative de fonction. Cette séance avait pour objectif d'approcher de manière intuitive les notions de fonction croissante et fonction décroissante, leur représentation graphique ainsi que la représentation des variations d'une fonction dans un tableau de variations. (Voir l'activité d'introduction proposée aux élèves sous format photocopié en annexe 1)

Pour la recherche de cette activité, la classe sera disposée en îlots de 3 à 4 élèves. L'avantage de cette disposition est que je peux venir en aide à plusieurs élèves à la fois. De plus, lors de travaux en groupe les élèves sont plus autonomes, communiquent plus facilement leur réponse qu'en classe entière, peuvent s'écouter et s'entraider et ainsi corriger leurs erreurs ou les erreurs de leurs camarades dans un langage approprié.

La mise en activité se déroulera de cette façon : je leur distribuerai l'activité sur papier et leur laisserai un temps de réflexion individuel de 5 minutes, puis un élève lira la consigne à voix haute pour m'assurer qu'il n'y ait pas de problème de vocabulaire. Ensuite, je laisserai un temps de recherche en groupe. Pendant ce temps de recherche, je passerai dans les îlots en leur demandant de m'expliquer leur démarche. Ils disposeront de cette activité photocopiée et d'une feuille blanche pour réaliser le travail demandé. A la fin de l'heure je ramasserai les productions afin de les évaluer.

Cette activité met en œuvre un problème ouvert, il y a donc plusieurs démarches envisageables pour le résoudre. C'est aussi un problème issu de la vie quotidienne, un problème contextualisé ce qui peut favoriser la mise en activité des élèves.

A la fin de l'heure je procéderai à un temps de synthèse pour faire un bilan des différentes procédures d'élèves.

Support	Objectifs visés en termes de compétences et de connaissances	Diagnostic des connaissances et des compétences des élèves
Activité d'introduction « Une étape du Tour de France »	<u>Connaissances visées :</u> • Approcher de manière intuitive les notions de fonction croissante et fonction décroissante ainsi que la représentation dans un tableau de variations et donner sens à ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle. • Décrire les variations d'altitude en fonction du nombre de kilomètres parcourus. • Donner une représentation pertinente du profil de l'étape. <u>Compétences visées :</u> • « Chercher » : Cette activité nécessite une part importante d'initiative, en effet la représentation d'une fonction n'est pas explicitement demandée, ça sera à l'élève d'être autonome en extrayant les informations utiles de l'énoncé et plus particulièrement du tableau indiquant les kilomètres parcourus, l'altitude et l'itinéraire. Il devra aussi relever les mots « informer » et « le profil de l'étape » pour comprendre la tâche à effectuer. Après cela, il devra confronter ces dernières informations à ses connaissances pour s'engager dans une démarche de résolution. Cette étape sera indispensable pour construire la représentation du profil de l'étape. • « Représenter » : L'élève devra choisir un cadre adapté pour répondre au problème : par exemple il pourra représenter les valeurs du tableau par des points dans un repère et ainsi tracer la courbe représentant l'altitude en fonction des kilomètres parcourus. • « Modéliser » le problème par une fonction. • « Communiquer » : C'est un problème ouvert (il y a plusieurs démarches possibles pour sa résolution) donc l'élève devra expliquer correctement sa démarche (par exemple découper son problème en sous-problèmes) et ainsi développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral. Il devra aussi décrire les différentes parties du parcours : par exemple du km 0 au km 47,5, l'altitude augmente.	Modéliser des phénomènes continus par une fonction. Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. Notion de fonction, d'antécédent, d'image.

Démarches potentielles d'élèves :

- Décrire en français le tableau : par exemple : au kilomètre 47,5 le cycliste se trouve à 1336 mètres d'altitude.

- Dédurre des différences d'altitudes les portions de montée et de descente du parcours.
- Schématiser ces différentes portions par des flèches.
- Tracer la courbe représentant l'altitude en fonction des kilomètres parcourus.
- Calculer les pentes de chaque droite pour connaître le niveau de difficulté des différents cols.
- Représenter le parcours sur une carte en indiquant les noms des différents cols et leurs altitudes.

Support	Obstacles prévisibles	Aides pour permettre aux élèves de comprendre
Activité d'introduction « Une étape du Tour de France »	Incompréhension du mot « profil ».	Réflexion en classe entière sur la signification du mot « profil » : Questionner les élèves sur l'intérêt de faire le « profil » d'une étape sous-entendu que lorsque l'on regarde le tableau de l'énoncé nous avons du mal à nous faire une idée de l'allure du parcours. Et qu'est-ce que l'on entend par « allure du parcours » ? Par quoi est caractérisé un parcours cycliste (ou autre : trail) ? Comment caractérise-t-on la difficulté d'un parcours cycliste ? On s'intéresse aux dénivelés donc aux différences d'altitudes. Lorsque l'on aura évoqué ces pistes de résolutions, les élèves pourront tous s'engager dans une démarche de résolution.
	Une des difficultés que peut rencontrer l'élève est d'identifier les deux quantités qui varient tout en étant liées (l'altitude en fonction du nombre de kilomètres parcourus).	Je pourrai alors le questionner sur la lecture du tableau et la représentation de chaque ligne.
	Il pourrait également y avoir un questionnement sur le choix de la représentation graphique : l'altitude en fonction du nombre de kilomètres parcourus ou le nombre de kilomètres parcourus en fonction de l'altitude ?	Je pourrai alors revenir sur la définition du mot « fonction » et leur demander : « Quelles fonctions avez-vous déjà rencontrées ? » Je pourrai également leur faire remarquer que l'altitude dépend d'où on se trouve (un point donné) que l'on peut déterminer en fonction des kilomètres parcourus depuis le départ.

	Pour les élèves qui représenteront l'altitude en fonction du temps par un graphique, il pourrait y avoir un questionnaire sur la façon de graduer les axes. Il pourrait y avoir aussi soucis de graduations avec des écarts non proportionnels sur les axes.	Je pourrai alors leur demander jusqu'à quelle valeur ont-ils besoin de graduer l'axe des ordonnées ce qui correspondra à l'altitude maximale ainsi que la valeur maximale de l'axe des abscisses qui correspondra à la distance de l'étape.
	Pour les élèves calculant les pentes de chaque droite, je pense que beaucoup d'entre eux ne vont pas faire attention aux unités et vont diviser le dénivelé en mètre par la distance parcourue en kilomètres par exemple.	Je pourrai alors les interroger sur l'exactitude de leur calcul et s'ils peuvent comparer une distance en mètre avec une distance en kilomètre.
	Méconnaissance du terme « pente » et/ou confusion avec la notion de déclivité.	Je pourrai alors leur demander comment ils peuvent représenter une pente, les interroger sur la définition du terme « pente » et le rapport avec le calcul de la tangente (dénivelé divisé par la distance parcourue à l'horizontale). Or ici nous ne connaissons pas la distance horizontale parcourue mais la distance réelle parcourue ce qui revient à calculer la déclivité correspondant au sinus (dénivelé divisé par la distance réelle parcourue)

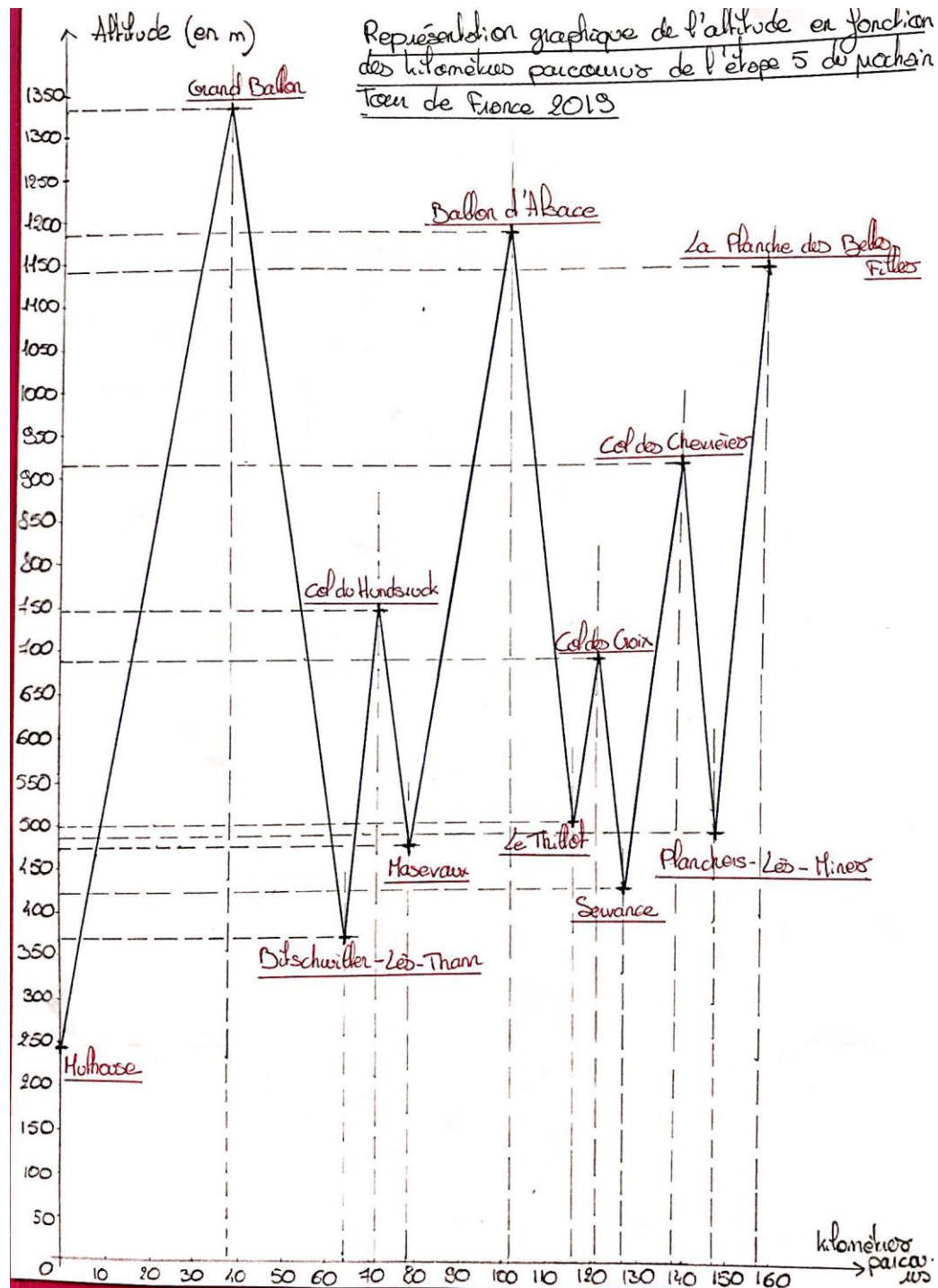
Synthèse en classe entière :

Certains élèves expliqueront leur démarche et je pourrai leur poser les questions suivantes : « Comment pourrait-on décrire le parcours (les portions de descente et de montée) ? » ainsi que « Comment l'altitude varie-t-elle quand la distance parcourue augmente ? ». Je serai là pour les amener à parler de fonction puis de fonction croissante et décroissante. On pourra également évoquer l'altitude maximale et l'altitude minimale du parcours.

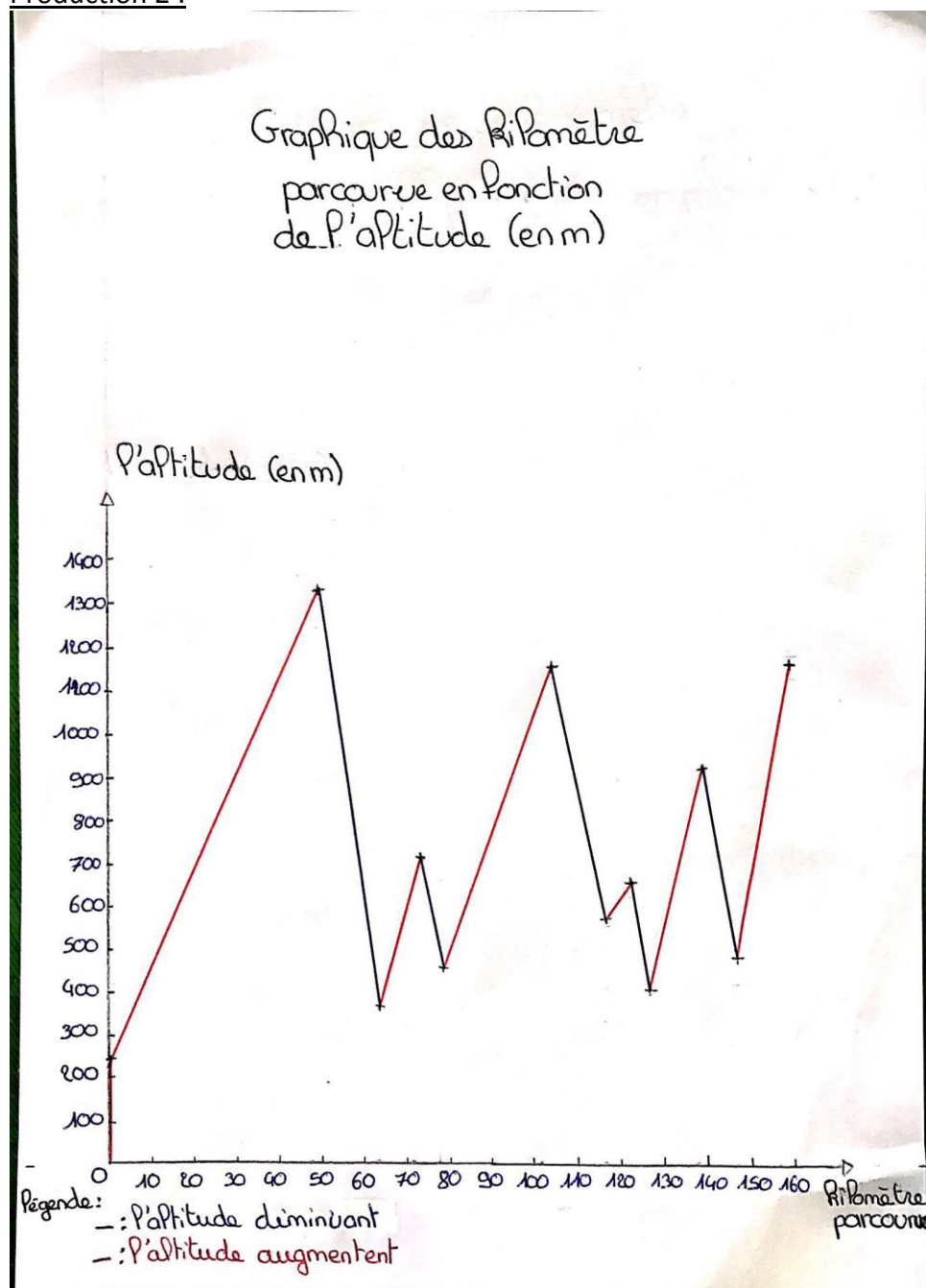
b) Analyse des procédures de résolution et analyse a posteriori

Voici 2 exemples de production d'élève :

Production 1 :



Production 2 :



Lors de la recherche de cette activité, j'ai été agréablement surprise par la rapide mise en activité des élèves. En effet il n'y a pas eu de réelles difficultés à comprendre ce qu'était le profil d'une étape du Tour de France, ils ont facilement associé le mot « profil » à « allure » ou « difficultés » et ont ainsi tous à l'unanimité opté pour une représentation graphique du problème (l'altitude en fonction des kilomètres parcourus). En effet, chacun avait bien saisi le fait qu'en regardant leur affiche on devait être en capacité d'avoir une vision des difficultés du parcours. Certains ont même repassé en bleu les portions de descente et en rouge les portions de montée ce qui était une bonne entrée ensuite pour introduire les notions de fonctions croissante et décroissante.

Le choix d'un problème contextualisé a facilité l'entrée en activité des élèves. De plus, ce problème était différent des travaux habituels car la synthèse devait se faire sous forme d'affiche ce qui a été très apprécié des élèves.

Le travail en groupe (disposition en îlots de 3 à 4 élèves) leur permet d'échanger, de débattre, ainsi aucun élève n'est laissé empêtré dans ses difficultés. Comme il y a une bonne ambiance dans la classe, aucun élève n'est laissé à l'écart ce qui permet un climat d'apprentissage favorable.

J'avais spécifiquement choisi de leur distribuer une feuille blanche afin de ne pas les guider vers une représentation graphique.

Ce qui fut le plus difficile fut la modélisation, en effet, beaucoup d'élèves avaient représenté la courbe d'une fonction mais peu d'entre eux ne savaient l'expliquer. J'ai pu remarquer cela lorsque je leur ai demandé de donner un titre à leur graphique. Ils ne savaient alors pas qu'ils avaient modélisé le problème par une fonction et que dans l'énoncé celle-ci était donnée sous forme de tableau et que eux avait choisi le cadre graphique pour la représenter. Lors de la synthèse de l'activité je leur ai alors demandé « Quel objet mathématique se représente par un graphique ? ». Ils ont alors compris qu'ils avaient représenté une fonction.

Cette activité m'a alors permis, grâce à la représentation et la modélisation, de manipuler des objets abstraits telles que les fonctions en partant d'un cadre concret et plus spécifiquement d'introduire les notions de fonctions croissante et décroissante à partir de leur représentation. En effet, cela a permis aux élèves de « voir » ce qu'est une fonction croissante : exemple « *on voit que sur $[0 ; 47,5[$ lorsque les kilomètres augmentent, l'altitude augmente.* » ce qui a permis ensuite une meilleure approche et accroche de ces notions.

3) Un problème à prise d'initiative en classe de première économique et sociale

a) Présentation de la classe

Durant cette séance, la classe était composée de 24 élèves (il y avait 7 absents du fait de voyages scolaires). Cette classe de 1^{ière} ES est plutôt calme composée d'un groupe d'élèves moteurs qui participent et s'investissent pleinement dans leur travail en classe et d'autres qui ont tendance à se reposer sur ces élèves moteurs et qui sont donc plus en retrait et moins impliqués. Pour cette classe de 1^{ières}, certaines notions purement mathématiques comme la dérivation ou les suites ont été difficiles à appréhender. En effet beaucoup d'élèves me demande souvent « Pourquoi on fait ça ? », « A quoi cela va me servir plus tard ? » et ont vraiment besoin qu'il y ait un lien entre mathématiques et réalité. D'ailleurs dès qu'on leur demande de faire abstraction du réel pour être dans le monde des mathématiques, une grande partie des élèves se trouvent en difficultés.

b) Analyse a priori

La séance durant laquelle j'ai proposé ce problème à prise d'initiative s'inscrit dans la séquence sur la dérivation et les fonctions polynômes de degré deux. Durant cette séance j'ai proposé aux élèves un problème à prise d'initiative dont le but était d'optimiser le volume d'une boîte. Ce problème avait pour objectifs de réinvestir différentes notions vues au cours de l'année telles que : notion de fonction, représentation graphique d'une fonction, variations et signes d'une fonction, extremum d'une fonction, fonctions polynômes de degré deux, équation du second degré, signe d'une fonction polynôme, dérivation.

Ce type de problème permet de mettre en avant toutes les compétences mathématiques à développer chez les élèves. En effet, un tel problème permet de mettre en œuvre une

recherche de façon autonome ; mener des raisonnements ; avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ; communiquer à l'écrit et à l'oral.

Les élèves avaient également recours à l'utilisation du numérique tel qu'un logiciel de géométrie dynamique, calcul formel, calculatrice selon leur besoin.

Voici l'énoncé du problème à prise d'initiative que j'avais projeté au tableau :

« Vous disposez d'une feuille de format A3 (29,7 x 42) avec laquelle vous devez construire une boîte rectangulaire sans couvercle. A vous de construire la boîte ayant le plus grand volume (indiquer alors ses dimensions)! »

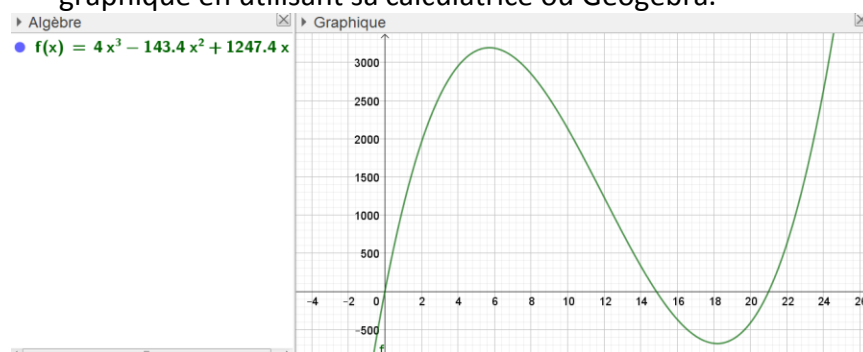
Support	Objectifs visés en termes de connaissances et de compétences	Diagnostic des connaissances et des compétences des élèves
Problème à prise d'initiative « Optimisation du volume d'une boîte » projeté au tableau J'apporterai deux exemples de boîtes pour illustrer la problématique Feuilles A3 pour qu'ils puissent manipuler l'objet et appréhender ce qui varie	<u>Connaissances visées :</u> • <u>Second degré :</u> ○ Équation du second degré, discriminant. ○ Signe du trinôme. • <u>Etude de fonctions :</u> ○ Variation et représentation graphique ○ Fonction dérivée ○ Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. ○ Extremum d'une fonction. <u>Compétences visées :</u> • « Chercher » : Ce problème nécessite une part importante d'initiative, en effet la modélisation d'une fonction n'est pas explicitement demandée. L'élève devra être autonome : il devra manipuler la feuille de papier pour appréhender la dimension qui varie et trouver une fonction liant le volume de la boîte et cette dimension. Après cela, il devra confronter ces recherches à ses connaissances pour s'engager dans une démarche de résolution. Cette étape sera indispensable à la résolution du problème. Il pourra aussi émettre une hypothèse sur la longueur de la hauteur à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, sa calculatrice ou le tableur. L'élève peut procéder par tâtonnement. • « Modéliser » : L'élève pourra transcrire cette situation réelle en langage mathématiques. En effet, il pourra modéliser le problème par une fonction liant le volume de la boîte et sa	Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. Notion de fonction, d'antécédent, d'image. Variations et signes d'une fonction Fonction polynômes du second degré Résolution d'équation du second degré Nombre dérivée Fonction dérivée obtenue grâce à un logiciel de calcul formel

hauteur qui varie.

- « Représenter » : L'élève devra choisir un cadre adapté pour répondre au problème : cadre algébrique avec l'utilisation de l'expression de la fonction trouvée, cadre graphique en utilisant la courbe de la fonction, cadre numérique : tableaux de valeurs, représentation de la fonction dans un tableau de signes et de variations.
- « Raisonner » : S'il utilise la fonction dérivée, il devra faire le lien entre le signe de la fonction dérivée et les variations de la fonction. Il devra aussi raisonner au sujet du domaine de définition de la fonction.
- « Calculer » : Résolution d'équations du second degré, utilisation du calcul formel pour calculer la fonction dérivée, calcul du volume de la boîte, calcul algébrique : exprimer la longueur et la largeur en fonction d'une variable.
- « Communiquer » : C'est un problème ouvert (il y a plusieurs démarches possibles pour sa résolution) donc l'élève devra expliquer correctement (d'un point de vue mathématique) sa démarche (par exemple découper son problème en sous-problèmes) et ainsi développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral pour être compris par l'ensemble de la classe.

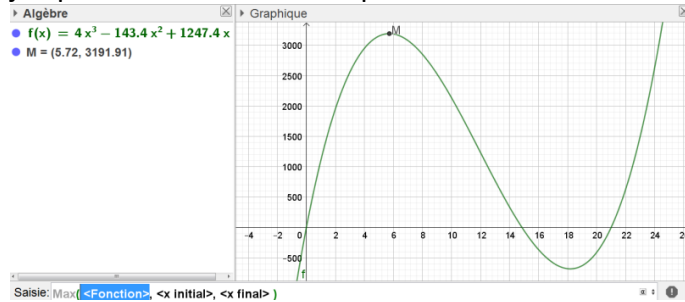
Démarches potentielles d'élèves aboutissant à une solution envisageable :

- Après avoir choisi la grandeur qu'il fait varier, l'élève procède par tâtonnement et teste différentes longueurs possible pour la hauteur et calcul directement le volume sans avoir recours à une fonction (la fonction est définie par un tableau de valeurs). Il peut alors trouver une valeur approchée du résultat ou un encadrement du résultat.
- Si l'élève trouve que le volume varie en fonction d'une grandeur, il pourra alors utiliser la représentation graphique de cette fonction et déterminer son maximum par lecture graphique en utilisant sa calculatrice ou Géogébra.



- Il pourrait également utiliser la fonction MAX donnant le maximum d'une fonction sur un intervalle sur Géogébra, ce qui suppose qu'il ait réfléchi au préalable à l'ensemble de définition de la fonction. Dans le cas où il n'y a pas réfléchi c'est l'occasion de le faire réfléchir à ce domaine de définition, car la courbe passe en dessous de 0 et monte

jusqu'à l'infini donc nous pouvons discuter sur le maximum qui répond au problème.



- Il pourrait aussi avoir recours à un tableau de valeurs obtenu grâce à la calculatrice ou le tableur et en déduire une valeur approchée ou un encadrement de la hauteur. Ceci dit, la solution approchée est valable d'un point de la physique. La valeur exacte n'est pas constructible en réalité.

x	f(x)
0	0
1	1108
2	1953,2
3	2559,6
4	2951,2
5	3152
6	3186
7	3077,2
8	2849,6
9	2527,2
10	2134
11	1694
12	1231,2
13	769,6
14	333,2
15	-54

x	f(x)
0	0
0,1	123,31
0,2	243,776
0,3	361,422
5,3	3178,622
5,4	3184,272
5,5	3188,35
5,6	3190,88
5,7	3191,886
5,8	3191,392
5,9	3189,422
6	3186
6,1	3181,15

- L'élève peut utiliser le cadre algébrique pour résoudre ce problème : il peut étudier le signe de sa dérivée (qu'il demandera à obtenir grâce à un logiciel de calcul formel) pour en déduire les variations de la fonction et ainsi trouver pour quelle valeur de la hauteur, le volume est maximal.

La fonction donnant le volume en fonction de la hauteur notée x est :

$$f(x) = 4x^3 - 143,4x^2 + 1247,4x.$$

Grâce à un logiciel de calcul formel nous obtenons la dérivée de f suivante :

► Calcul formel

1 $f'(x)$

• $\approx 12x^2 - 286,8x + 1247,4$

Nous allons tout d'abord étudier le signe de la dérivée.

C'est une fonction du second degré, pour étudier son signe, on résout tout d'abord l'équation

$$f'(x) = 0 :$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-286,8)^2 - 4 \times 12 \times 1247,4$$

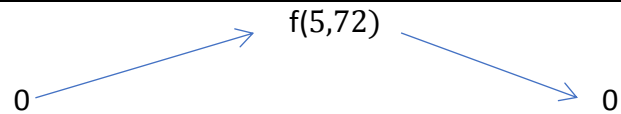
$$= 22\,379,04$$

$\Delta > 0$, l'équation admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{286,8 - \sqrt{22\,379,04}}{24} \approx 5,72 \text{ cm}$ et

$$x_2 = \frac{286,8 + \sqrt{22\,379,04}}{24} \approx 18,18 \text{ cm}$$

De plus, $a = 12 > 0$ donc la fonction dérivée sera négative entre $[x_1; x_2]$ et positive sinon. (Réflexion sur l'intervalle de définition de la fonction f).

Nous en déduisons alors le tableau de signes suivant :

X	0	5,72	14,85
Signes de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

D'après le tableau de variation de la fonction f , celle-ci est maximale pour $x \approx 5,7 \text{ cm}$. Il faut donc découper un carré de côté 5,7 cm pour obtenir une boîte de dimensions : $L=18,3 \text{ cm}$, $l=30,6 \text{ cm}$ et $h=5,7 \text{ cm}$ pour un volume de $f(4,5) \approx 3\,191,9 \text{ cm}^3$ soit 3,1919 L.

Support	Obstacles prévisibles	Aides pour permettre aux élèves de comprendre
Problème à prise d'initiative « Optimisation du volume d'une boîte » vidéo projeté au tableau. J'apporterai deux exemples de boîtes pour illustrer la problématique.	Problème de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle	Revenir alors sur la grandeur volume (grandeur en 3 dimensions) et dans quelle unité elle s'exprime (à quoi correspond par exemple 1 cm^3).
	Une des grandes difficultés que peut rencontrer l'élève est la modélisation par une fonction : identifier que les dimensions sont liées et qu'il faudra exprimer deux dimensions à partir d'une troisième. Un véritable obstacle est d'exprimer les deux grandeurs en fonction de la troisième choisie comme variable. Déterminer l'expression de la fonction va être une difficulté pour les élèves. De plus on va obtenir la forme factorisée. Faut-il développer ?	- Je pourrai alors revenir sur la construction du patron de la boîte et lui faire sentir qu'il a besoin d'enlever des carrés aux quatre coins de la feuille dont la longueur d'un carré correspondra à la hauteur de la boîte. - Revenir à la définition d'une fonction. Lui demander de quelle fonction a-t-il besoin ? besoin d'une variable et une seule (pas 3) - Lui demander de calculer le volume de la boîte pour des valeurs particulières, pour comprendre le mécanisme du calcul de la longueur et la largeur pour ensuite passer à la généralisation avec x (lui faire sentir que la longueur et la largeur dépendent aussi de x).

	Lorsqu'il a modélisé le problème par une fonction, l'élève peut être en difficultés pour étudier ses variations et déterminer son maximum.	- Je pourrai alors l'aider en lui demandant la définition du maximum d'une fonction sur un intervalle. - Demander aux élèves comment peut-on trouver un maximum ? Lister des méthodes plus ou moins expertes. - Comment pourrait-il le lire ? (à l'aide de la représentation graphique de la fonction par exemple ou en utilisant un tableau de valeurs).
	L'élève pourrait essayer de tracer directement le tableau de variation de la fonction, or celle-ci est de degré 3 alors il ne saura pas le faire.	Quel outil a-t-on découvert cette année nous permet d'étudier les variations d'une fonction ?
	Lors de la recherche des racines de la fonction dérivée l'élève va trouver une longueur qui n'est pas dans l'ensemble de définition de la fonction. Certains ne vont pas s'en rendre compte. L'intervalle de définition arrive à la fin lors du retour au problème physique et la validation.	Je pourrai alors le laisser réfléchir sur la validité de sa réponse en retournant sur la situation concrète de la boîte. Avec cette longueur-là, la boîte est-elle fabricable ?
	L'élève peut aussi trouver une valeur exacte sur sa calculatrice ou autre logiciel et être convaincu que c'est la bonne réponse.	Lui faire comprendre que grâce aux logiciels, il trouve une valeur approchée, il peut faire une hypothèse sur la valeur de x, or comment peut-il faire pour la trouver ? (Rebondir sur l'utilité de la fonction dérivée dans ce cas).

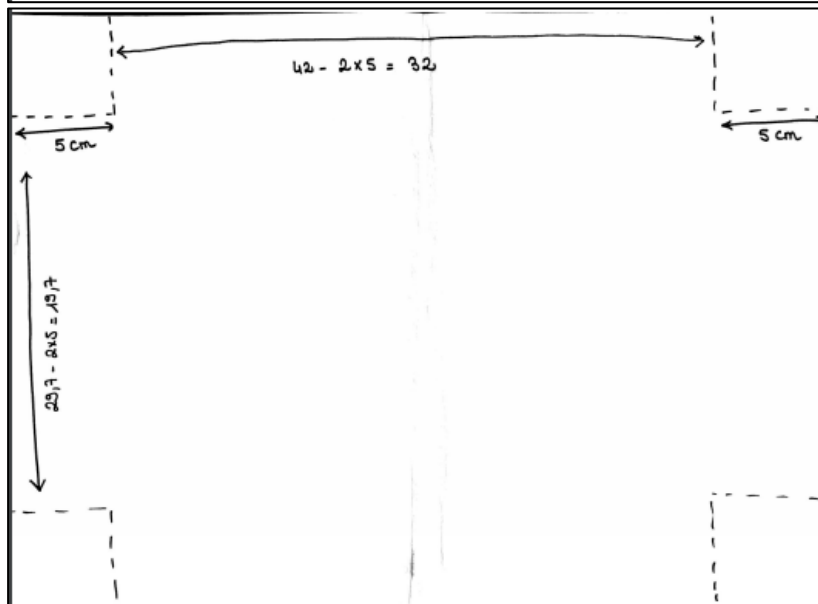
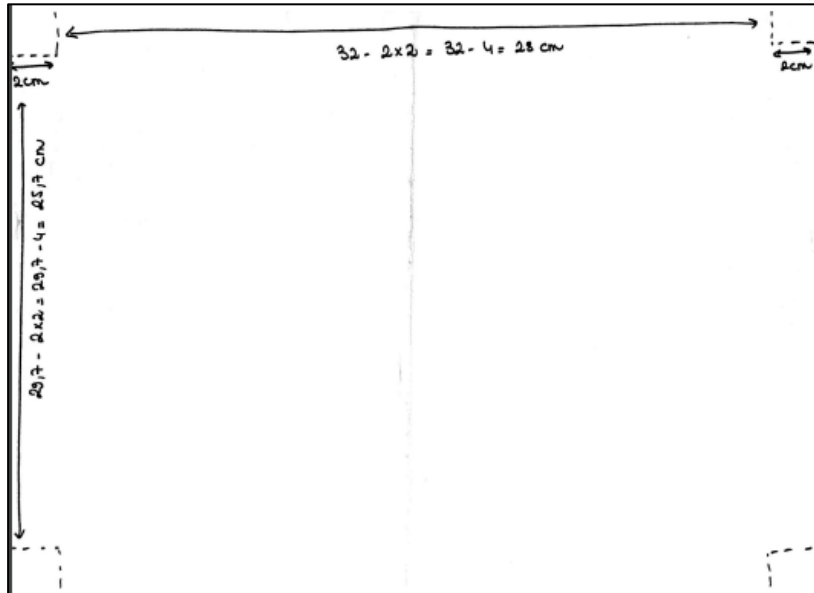
c) Comment ai-je développé grâce à cette activité la compétence « modéliser » chez les élèves ?

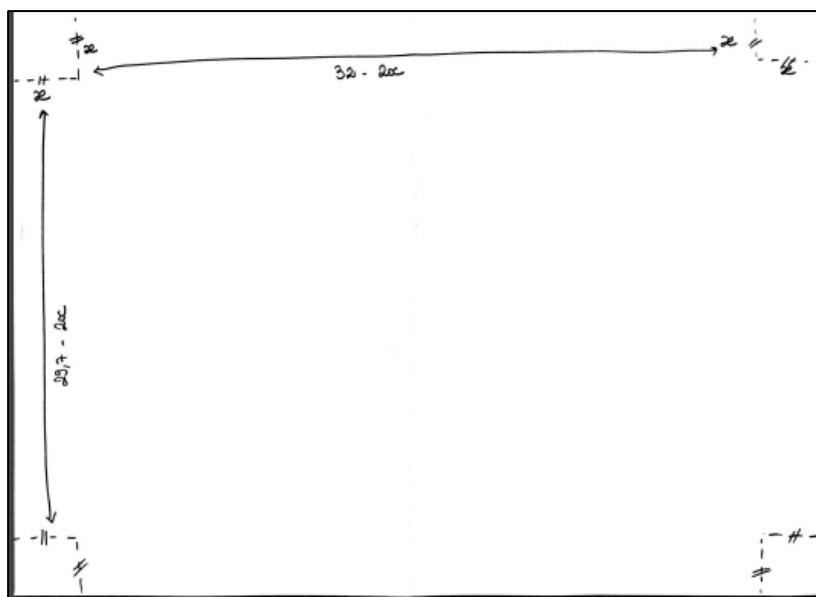
Lors de la recherche de cette activité, les élèves étaient disposés en îlots de 3 à 4. Comme souvent lors de la recherche de problème à prise d'initiative, ils se sont rapidement mis en activité.

Ils avaient à leur disposition des feuilles A3 et trois boîtes sans couvercle de volume différent que j'avais fabriquées au préalable.

Ces 3 boîtes ont été d'une plus grande aide pour, tout d'abord, comprendre comment fabriquer une boîte sans couvercle. Les boîtes circulaient alors dans la salle de classe. Certains élèves mesuraient les différentes dimensions de chaque boîte pour en donner le volume, d'autres reconstruisaient une nouvelle boîte. Pour faire comprendre aux élèves que 3 dimensions de la boîte étaient liées, je leur demandais de me représenter sur une feuille A3 ce que j'avais découpé pour fabriquer ma boîte (voir les productions ci-après). Je leur demandais ensuite ce qui variait entre les différentes boîtes, ils comprenaient de suite que

c'était la hauteur. Ensuite je leur faisais prendre des exemples : « si je prends comme hauteur 5 cm, quelle longueur et largeur de la boîte vais-je obtenir ?, puis si je prends 2 cm ? » et ensuite je leur demandais « si je prends n'importe quelle longueur pour la hauteur, comment pourrais-je l'appeler ? » Ils me répondaient que c'était une variable et qu'on pouvait l'appeler « x », ils écrivaient alors sur la feuille que la longueur s'exprimait : « $32 - 2x$ » et la largeur « $27,5 - 2x$ » ce fût la première étape de modélisation du problème. On posait alors la hauteur comme inconnue et on exprimait la longueur et la largeur en fonction de cette variable (voir productions ci-après).





Après avoir posé chaque côté comme inconnue certains étaient perdus, ils ne savaient pas pourquoi on avait posé ce x et comment on pouvait l'exploiter.

Je revenais alors à la question de départ « Qu'est-ce que l'on cherche ? » : Le volume maximal que l'on peut fabriquer avec une feuille A3 !

Je leur demandais d'exprimer le volume de cette boîte : $V(x) = x(32 - 2x)(29,7 - 2x)$. Nous arrivions à la fin de la modélisation de ce problème par une fonction donnant le volume de la boîte en fonction de sa hauteur.

Comme pour l'activité du « Tour de France » en seconde, beaucoup d'élève ne savait alors pas qu'ils avaient transcrit un problème de la réalité en langage mathématiques par un outil qui est une fonction. Il fallait alors leur expliquer cette étape.

Lorsque la modélisation fut terminée, une nouvelle question émergeait de la part des élèves : « Et ça nous donne quoi d'avoir cette fonction ? ». Il fallait alors les faire réfléchir sur l'utilité de cet objet mathématique, pourquoi nous en avons besoin ? Nous avons évoqué le terme « volume maximal » puis « maximum d'une fonction sur un intervalle ».

Puis, je leur ai laissé un deuxième temps de réflexion afin d'observer différentes démarches. La plupart d'entre eux ont utilisé leur calculatrice pour représenter cette fonction. Ils cherchaient le maximum dans un tableau de valeurs ou sur lisait ce maximum sur la représentation graphique. C'est à ce moment nous avons pu définir le domaine de définition de cette fonction.

4) Bilan de ces deux activités

a) Du point de vue de l'enseignant

Ces deux activités m'ont permis :

- en seconde d'introduire une notion, en première ES de réinvestir différents chapitres ainsi que donner du sens au chapitre sur la dérivation.
- de répondre aux attentes du programme : par exemple dans les programmes de première ES on peut lire : « Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes : mettre en œuvre une recherche de

façon autonome ; mener des raisonnements ; avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ; communiquer à l'écrit et à l'oral.

- de faire un diagnostic des connaissances des élèves : par exemple, pour l'activité sur le volume d'une boîte mon diagnostic était : la notion de dérivation n'était pas encore mobilisable chez les élèves car ils n'avaient pas eu assez de temps pour s'en emparer.
- différencier ma pédagogie, en effet, lors de la recherche de ses deux activités, chaque élèves pouvait avancer à son rythme.
- voir les différentes démarches de raisonnement et en discuter avec les élèves en prenant le temps de passer dans chaque groupe.
- de m'appuyer sur leurs erreurs pour les faire avancer dans leur recherche.

b) Du point de vue de l'élève

Ces deux activités ont permis :

- de développer l'autonomie de tous les élèves.
- de développer leur esprit critique et la compétence « communiquer ».
- de donner du sens à l'utilisation des mathématiques.
- de motiver l'élève et de lui donner le goût des mathématiques à travers le goût de la recherche et du travail collaboratif.
- de prendre conscience de leur connaissance dans cette matière.
- de prendre conscience d'erreurs ou de contradictions par rapport à la réalité : par exemple, en première s'ils prenaient 20 cm pour la hauteur, ils pouvaient très rapidement observer que la boîte n'était pas constructible.
- De développer chez l'élève des automatismes, des protocoles pour résoudre des problèmes et en l'occurrence suivre le protocole de modélisation proposé par LEMA : transcrire un problème du monde réel en problème mathématiques grâce à un outil mathématique, le résoudre dans le monde mathématique puis répondre au problème dans le monde réel.
- développer la confiance en soi, en effet, même les élèves les plus timides se sont engagés dans ces problèmes et n'hésitaient pas à proposer leurs solutions et à défendre leur point de vue.
- d'obliger les élèves à justifier leurs démarches, à écrire leur raisonnement.
- de partager leur point de vue entre pair et d'expliquer leur démarches dans chaque groupe ce qui est un vrai défi pour eux.

c) Du point de vue des mathématiques mises en jeu

Au niveau des mathématiques ces deux activités permettent :

- d'introduire des notions de fonction croissante et fonction décroissante ainsi que leur représentation dans un tableau de variation pour la classe de seconde.
- de réinvestir des notions d'équation du second degré, discriminant, signe d'un trinôme, variation et représentation graphique, fonction dérivée, lien entre signe de la dérivée et sens de variation et extremum d'une fonction.

- de faire la différence entre conjecture et démonstration en mathématique (par exemple : dans le cas du problème de première, nous pouvions conjecturer le volume maximal par lecture graphique mais nous devions le prouver en utilisant la dérivation).
- de se rendre compte que nous pouvions utiliser différentes représentation d'une fonction : représentation graphique, algébrique ou par un tableau de variation.
- comprendre ce qu'est un modèle mathématiques : par exemple en seconde : nous avons supposé que la route qui séparait deux cols était continue et bien leur faire comprendre que cela n'est qu'un modèle que nous avons choisi et qu'il ne représente pas exactement la réalité.

Conclusion

Toutes les recherches et les expérimentations qui ont contribué à façonner ce mémoire ont été d'une grande richesse. Grâce à elles, je vais pouvoir répondre à la problématique évoquée dans l'introduction : En quoi la modélisation et la représentation permettent-elles aux élèves de mieux comprendre les notions mathématiques ?

Tout d'abord, les recherches que j'ai faites m'ont montré que beaucoup de travaux sur la modélisation et la représentation en classe de mathématiques avaient déjà été entreprises par de nombreux chercheurs et professeurs en mathématiques. Ces différentes recherches m'ont aidé à faire la différence entre ces deux compétences mathématiques qui n'était d'ailleurs pas du tout évidente pour moi lorsqu'on m'a demandé d'évaluer les élèves selon les six compétences mathématiques en début d'année. En effet, « représenter » serait changer de cadre ou de registre (algébrique, géométrique, par exemple) et modéliser serait transcrire un problème du monde réel en langage mathématique. Ainsi, « modéliser » est une partie de la compétence « représenter » en effet lorsque l'on modélise on représente la réalité à l'aide d'un modèle mathématique. Ces deux compétences sont, en fait, étroitement liées.

Lors de mes deux expérimentations qui mettaient en scène deux problèmes ouverts contextualisés, j'ai pu observer que le travail de ces deux compétences en classe était indispensable pour faire vivre une activité mathématique avec des élèves. En tant que professeur stagiaire, j'appréhendais de donner à mes élèves des problèmes ouverts dans lesquels la tâche de modélisation était laissée à l'élève. En effet, j'avais peur qu'ils ne s'engagent pas dans une démarche de résolution, qu'ils trouvent cela trop compliqué, qu'ils se découragent ou qu'ils s'égarent dans leur recherche. J'appréhendais aussi le fait de gérer la mise en commun de ce type d'activité car il y a toujours une certaine forme d'improvisation. Mais, ces deux expériences furent fructueuses, autant pour les élèves que pour moi. En effet, chaque élève pouvait entrer dans l'activité en avançant dans le problème à son rythme et surtout chacun pouvait découvrir et se rendre compte de la nécessité des outils mathématiques. Pour moi, c'était l'occasion d'introduire ou de réinvestir certaines notions, de découvrir leurs différentes démarches et raisonnements et de leur montrer le lien entre mathématiques et réalité. Cependant lors de la recherche de ce type de problème, la modélisation reste une étape difficile pour les élèves. En effet, ils arrivent à modéliser par une fonction qu'ils représentent par un graphique ou un tableau de valeurs mais ne savent pas l'expliquer. Ainsi, c'est à nous, professeurs de mathématiques, de faire vivre ces compétences en classe, en les expliquant clairement aux élèves d'autant plus que ce sont deux des six compétences mathématiques à travailler et à évaluer à partir du cycle 3.

Je pense que c'est en pratiquant ce type de tâche nécessitant une étape de modélisation et en laissant manier les différentes représentations d'un outil mathématiques que l'élève pourra faire le lien entre mathématiques et réalité. Lien essentiel pour la compréhension des mathématiques et l'intérêt qu'il portera à cette matière.

Bibliographie

Duperret, Jean-Claude. « De la modélisation du monde au monde des modèles (2) », n° 486 (s. d.): 23.

Giorgio, Israël. La Mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique – 3 janvier 1996

Richard Cabassut, conférence «La modélisation mathématique au collège et au lycée professionnel.» le 19/05/2016 à Rouen.

Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012, OCDE, p. 106.

LEMA (2009) site du projet LEMA www.lemma-project.org

Ministère (2016). Compétences travaillées en mathématiques : modéliser, représenter. Téléchargé le 18/11/18 sur <http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html#lien1>.

Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019 : programmes d'enseignement de la classe de seconde générale et technologique.

Bulletin officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010 : Programme d'enseignement spécifique de mathématiques en classe de première de la série économique et sociale et d'enseignement obligatoire au choix en classe de première de la série littéraire

Dictionnaire Larousse. Sites web :
<https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/mod%C3%A9liser/51924?q=mod%C3%A9liser#51801>
<https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/repr%C3%A9senter/68486?q=repr%C3%A9senter#67737>

Résumé

J'ai souvent entendu dans mon entourage des questions du type : « A quoi ça sert les mathématiques ? », « Pourquoi apprend-t-on les mathématiques à l'école ? », « A quoi cela va me servir plus tard ? ».

En effet, les mathématiques sont très souvent considérées comme des sciences abstraites où l'on ne peut pas toucher ni manipuler les objets que l'on utilise. Les élèves et une majeure partie de la société, pensent que les mathématiques qui sont apprises à partir du collège sont inutiles dans la vie courante et qu'elles vont servir à une minorité de personnes dans leur métier ou dans leur vie.

Le plus important pour moi en devenant professeur est que les élèves puissent mettre un sens derrière toutes les notions mathématiques, et qu'ils apprennent à traduire un problème réel en langage mathématique. Ainsi la modélisation et la représentation contribue à façonner auprès de l'élève une image positive et utile de celles-ci. C'est pourquoi dans ce mémoire, j'avais envie de partager certaines réponses à ces questions.

Mots-clés : Modélisation, représentation, mathématiques et réalité.

Annexes

Annexe 1 :

Compétences visées :

- ☒ **Chercher**, analyser un problème
- ☒ **Représenter**, choisir un cadre adapté
- ☒ **Communiquer** à l'oral et à l'écrit

Le Tour de France, souvent appelé « Le Tour » ou « la Grande Boucle », est une compétition cycliste par étapes masculine qui a lieu principalement en France chaque année.

Traditionnellement, la course se déroule principalement au mois de juillet. Bien que le parcours change chaque année, le format de la course reste le même avec au moins deux contre-la-montre, le passage à travers les chaînes de montagnes des Pyrénées et des Alpes et l'arrivée sur les Champs-Élysées à Paris. Les éditions modernes du Tour de France se composent de 21 étapes réparties sur une période de 23 jours et couvrent près de 3 500 kilomètres.

Nous allons nous intéresser à l'étape 5 du prochain Tour de France 2019 départ de Mulhouse et arrivée à La Planche des belles filles en Haute Saône.

On trouve sur le site de l'épreuve 2019 les informations suivantes à propos de cette étape :

Kilomètres parcourus	Altitude (en m)	Itinéraire
0	249	Mulhouse
47,5	1336	Grand Ballon
64	361	Bitschwiller-Lès-Thann
71	748	Col du Hundsruck
78	472	Masevaux
101,5	1178	Ballon d'Alsace
116	498	Le Thillot
120,5	678	Col des Croix
126,5	418	Servance
138	914	Col des Chevrères
147	483	Planchers-Lès-Mines
157	1140	La Planche des Belles Filles

Votre travail : Sur une feuille de format 21 × 29,7, concevez une affiche pour informer les coureurs et les spectateurs sur le profil de l'étape.